Pays :Togo	**Année** : **2011**	**Session** : normale
Examen : BAC D	**Durée** : 4h	**Coefficient** : 3

Exercice 1

Une entreprise fabrique des appareils électroniques. La probabilité pour qu'un appareil fabriqué fonctionne parfaitement est 9/10.

1. On note F l'événement « l'appareil fonctionne parfaitement » et $\overline{F}$ l'événement contraire de F. Calculer la probabilité de l'événement $\overline{F}$.
2. On fait subir à chaque appareil un test avant sa livraison ; on constate que :
- quand un appareil est en parfait état de fonctionnement, il est toujours accepté à l'issue du test.
- quand un appareil n'est pas en parfait état de fonctionnement, il peut être néanmoins accepté avec une probabilité de 1/11.

On note T l'événement : « l'appareil est accepté à l'issue du test ».
a) Démontrer que la probabilité de l'événement T et F noté $T \cap F$ est égale à 9/10.
b) Calculer la probabilité de $T \cap \overline{F}$.
c) En déduire la probabilité de l'événement T.
d) Calculer la probabilité de F sachant T (probabilité conditionnelle de F par rapport à T).

Exercice 2

Soit $P(Z) = Z^3 + \alpha Z^2 + \beta Z + \gamma$ un polynôme complexe de degré 3 où α, β et γ sont des nombres complexes donnés.
1.*a*) Démontrer que si le polynôme *P(Z)* admet trois racines *a, b* et *c* alors on a simultanément.
$a + b + c = -\alpha$; $ab + bc + ac = \beta$ et $abc = -\gamma$.
b) Former alors le polynôme *P(Z)* lorsque ses racines sont:
$a = 1 + 3i\sqrt{3}$; $b = -2 + i\sqrt{3}$ et $c = 4 - 2i\sqrt{3}$.
2. On désigne par *A, B* et *C* les points d'affixes respectives *a, b* et *c* dans le plan complexe muni d'un repère $(O\,;\,\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
a) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.
b) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $\dfrac{c-a}{b-a}$.
c) En déduire la valeur de $\dfrac{AC}{AB}$ et la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$
3. *a*) Donner l'écriture complexe de la similitude directe *s* de centre A, qui transforme B en C.
b) Déterminer l'affixe z_1 du point B_1 qui a pour image B par *s*.

Problème

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = -x^2 + 6 - 4\ln x$.

1. Etudier le sens de variation de g.
2. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de g.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$ et que $1{,}86 \leq \alpha \leq 1{,}87$.
4. Donner alors le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x appartenant à $]0;\alpha[$ et à $]\alpha;+\infty[$.
(*La représentation graphique de g n'est pas demandée*).

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)= -\frac{1}{2}x+3+\frac{2ln(x)-1}{x}$. On désigne par ($C$) la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{i},\vec{j}$).
Unité = 2cm.
1. *a*) Calculer $f'(x)$ pour x élément de $]0;+\infty[$ et exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$ où g est la fonction définie à la partie ***A.***
b) Déterminer le sens de variation de f.
c) Calculer la limite de f en 0 puis en $+\infty$.
2. *a*) Démontrer que la droite (D) d'équation : $y = -\frac{1}{2}x+3$ est asymptote à (C).
b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).
c) Préciser les coordonnées du point A intersection de (C) et (D).
3. *a*) Démontrer que $ln(\alpha) = \frac{6-\alpha^2}{4}$ et que $f(\alpha) = -\alpha+3+\frac{2}{\alpha}$ où α est le nombre réel défini à la partie **A**- question **3**.
b) Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = -x+3+\frac{2}{x}$.
b_1) Etudier le sens de variation de h.
b_2) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
On rappelle que : $1{,}86 \leq \alpha \leq 1{,}87$.
4. *a*) Dresser le tableau de variation de f.
b) Calculer $f(\frac{1}{e})$; $f(1)$. Que peut-on conclure pour la courbe (C) ?
c) Construire (D), (C) puis placer le point A.

Partie C

Soit k la fonction définie par : $k(x) = f(x) - (-\frac{1}{2}x+3)$.
1. En remarquant que : $k(x) = 2\frac{ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$, calculer l'intégrale $I_0 = \int_{\sqrt{e}}^{e} k(x)dx$.
2. Donner une interprétation géométrique de I_0.
3. On considère la suite numérique (a_n) définie sur IN par : $a_n = e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$.
a) Calculer en fonction de n l'intégrale $I_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} k(x)dx$.
b) Démontrer que (I_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

Pays :Togo	**Année** : **2012**	**Session** : normale
Examen : BAC D	**Durée** : 4h	**Coefficient** : 3

Exercice 1

Le tableau suivant donne l'évolution du prix en dollar ($) de la tonne d'une terre rare entrant dans la fabrication d'un composant électronique ces dix dernières années.

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Numéro de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prix de la tonne en $ (y_i)	38	45	40	55	70	60	75	80	95	106

1.*a*) Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i , y_i) dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unités : 1 cm pour une année en abscisse et 1 cm pour dix dollars en ordonnée.

b) Calculer les coordonnées du point moyen G.

2.*a*) Calculer à 10^{-2} près par excès, le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i ,y_i).

En déduire qu'un ajustement affine est justifié.

b) Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite de régression linéaire (D) de y en x. (*On donnera les coefficients à 10^{-2} près par excès*).

c) Tracer la droite (D) dans le même repère que celui du nuage des points.

3. En supposant que l'évolution se poursuive de la même façon dans les années à venir :

a) Donner une estimation du prix de la tonne de cette terre rare en 2016.

b) En quelle année le prix de la tonne de cette terre rare dépassera 180 $?

Exercice 2

On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$.

1.*a*) Vérifier que i est une solution de (E).

b) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :

$\forall z \in \mathbb{C}$, $z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(az^2 + bz + c)$.

c) En déduire les solutions de (E).

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal (O; $\vec{u}, \vec{v}$) , on désigne par A , B et C les points d'affixe $z_A = i$, $z_B = 2 + 3i$ et $z_C = 2 - 3i$.

a) Soit r la rotation de centre B et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{4}$.

Déterminer l'affixe $z_{A'}$ du point A' image de A par la rotation r.

b) Calculer $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_{A'}}$.

En déduire l'existence d'une homothétie h de centre B qui transforme A' en C et préciser son rapport.

3. On considère la transformation plane s définie par : $s = hor$

a) Quelle est l'image de A par s ?

b) Préciser la nature et les éléments géométriques de s.

Problème

Soit k un entier naturel non nul. On considère la fonction f_k dérivable et définie sur IR par :

$f_k(x) = x^k(e^{-x} - \frac{1}{2})$.

On note (Ck) la courbe représentative de f_k dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$) (Unité graphique : 4 cm).

Partie A

1.*a*) Calculer la limite de f_k en + ∞.

b) Etudier, suivant la parité de *k*, la limite de f_k en – ∞.

2. Calculer la fonction dérivée de f_k, puis démontrer que pour tout *x* réel, $f_k'(x) = x^{k-1}g_k(x)$ où $g_k(x) = (k-x)e^{-x} - \frac{k}{2}$.

3.*a*)) Etudier les variations de g_k.

b) En déduire que l'équation $g_k(x) = 0$, admet une unique solution α_k dans IR et que α_k est strictement positif.

c) Déterminer le signe de g_k sur IR.

En déduire le signe de f'_k sur IR (distinguer k pair et k impair).

d) Dresser le tableau de variation de f_k .

Partie B

Dans cette partie, on prend $k = 1$. Donc $f_1(x) = xe^{-x} - \frac{x}{2}$ et $g_1(x) = (1-x)e^{-x} - \frac{1}{2}$.

1.*a*) Démontrer que : $0 < \alpha_1 < \frac{1}{2}$.

b) En utilisant g_1, démontrer que : $e^{-\alpha_1} = \frac{1}{2(1-\alpha_1)}$.

En déduire l'expression de $f_1(\alpha_1)$ ne contenant pas $e^{-\alpha_1}$.

c) Déduire de la question **A-3**.*d*) le tableau de variation de f_1.

2. Démontrer que la courbe (C_1) possède une asymptote (D) en + ∞ dont on précisera une équation.

3. Soit la fonction φ dérivable et définie sur $[0;\frac{1}{2}]$ par : $\varphi(x) = 1 - \frac{e^x}{2}$.

a) Démontrer que α_1 est l'unique solution de l'équation : $\varphi(x) = x$.

b) Démontrer que pour tout *x* élément de $[0;\frac{1}{2}]$, $\varphi(x)$ est aussi élément de $[0;\frac{1}{2}]$.

c) Démontrer que pour tout *x* élément de $[0;\frac{1}{2}]$, on a : $|\varphi'(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}$.

4. On définit la suite numérique (U_n) par :

$U_o = 0$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \varphi(U_n)$.

a) Démontrer que (U_n) est une suite d'éléments de $[0;\frac{1}{2}]$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$|U_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}|U_n - \alpha_1|.$$

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $|U_n - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{e}}{2})^n$.

En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

5.*a*) Etudier le signe de f_1 sur IR.

b) On donne $\alpha_1 \simeq 0{,}315$. Construire (C_1) et (D) dans le repère (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

6.*a*) Déterminer les nombres réels *a* et *b* tels que, la fonction *H* dérivable et définie sur IR par $H(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction : $x \longmapsto xe^{-x}$.

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_1), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

Pays :Togo	**Année** : **2013**	**Session** : normale
Examen : BAC D	**Durée** : 4h	**Coefficient** : 3

Exercice 1

Soit a un nombre complexe.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1+i)z^2 - 2i(a+1)z + (i-1)(a^2+1) = 0$.

2. Soient z_1 et z_2 les solutions de cette équation .

Trouver une relation entre z_1 et z_2 indépendante de a .

3. Caractériser la transformation f du plan complexe qui, au point M_1 d'affixe z_1 associe le point M_2 d'affixe z_2.

4. On pose $z_1 = x+iy$ et $z_2 = x' + iy'$.

a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

b) Quelle est l'image par f de la droite (D) d'équation : $x + 2y - 1 = 0$?

Exercice 2

On considère les équations différentielles suivantes :

(E) : $y''(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 2(1-2x)e^x$

(E') : $y''(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 0$ dans lesquelles m est un paramètre réel .

1. Résoudre, suivant les valeurs de m , l'équation (E').

2. Déterminer la valeur de m pour laquelle, la fonction h définie sur IR par : $h(x) = x^2e^x$ est une solution de (E).

3. Dans cette question on pose $m = 2$.

a) Soit φ une fonction au moins deux fois dérivable sur IR.

a₁) Démontrer que si φ est une solution de (E) alors $(\varphi - h)$ est une solution de (E').

a₂) Démontrer que si $(\varphi - h)$ est une solution de (E') alors φ est une solution de (E)

b) Déduire de 1., la résolution de (E') ; puis résoudre (E).

c) Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative, dans le plan rapporté à un repère orthonormé passe par le point Ω (0 ;-1) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1.

4. Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = (x^2 - 2)e^x + e^{3x}$ et U une primitive sur IR de la fonction : $x \mapsto 2(1-2x)e^x$.

a) Sachant que g est une solution de (E) , démontrer que la fonction G définie sur IR par :

$G(x) = \frac{1}{3}[U(x) - g'(x) + 4g(x)]$ est une primitive de g sur IR.

b) Déterminer une expression de $U(x)$ de la forme : $U(x) = (ax+b)e^x$ où a et b sont des constantes réelles.

c) En déduire $G(x)$.

Problème

On considère la fonction f définie sur $[0 ;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^x-1}{xe^x+1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I ,J). L'unité graphique est 2 cm.

A/

Soit g la fonction définie sur $[0 ;+\infty[$ par : $g(x) = x+2-e^x$.

1. Etudier le sens de variation de g sur $[0 ;+\infty[$ et déterminer la limite de g en $+\infty$.

2.*a*) Démontrer que l'équation : $g(x) = 0$ admet une seule solution dans $[0 ;+\infty[$.

On note α cette solution.

b) Prouver que : 1,14 <α< 1,15.

3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

B/

1.*a*) Démontrer que, pour tout x appartenant à $[0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0 ;+\infty[$.

2.*a*) Démontrer que, pour tout réel positif x, $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$.

b) En déduire la limite de f en $+\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3.*a*) Etablir que: $f(\alpha)= \frac{1}{\alpha+1}$.

b) En utilisant l'encadrement de α établi dans la question A/ 2. donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

5.*a*) Etablir que pour tout x appartenant à $[0;+\infty[$,

$f(x) - x = \frac{(x+1)\varphi(x)}{xe^x+1}$ avec $\varphi(x) = e^x - xe^x - 1$.

b) Etudier le sens de variation de φ sur $[0;+\infty[$.

En déduire le signe de φ sur $[0;+\infty[$.

c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T) .

d) Tracer (C) et (T).

C/

1. Déterminer une primitive F de f sur $[0;+\infty[$; on pourra utiliser l'expression de $f(x)$ établie en B/2.

On note D la partie du plan limitée par la courbe (C), la tangente (T), les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

2. Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de la partie D.

3. Pour tout entier naturel k on pose : $V_k=\int_k^{k+1} f(x)dx$.

a) Calculer V_0 , V_1 et V_2.

b) Démontrer que pour tout entier naturel k ≥ 2 , $f(k+1) \leq V_k \leq f(k)$.

c) En déduire la limite de V_k lorsque k tend vers $+\infty$.

CORRIGES 2011

Exercice 1

1. ***Probabilité de l'évènement $\overline{F}$***

On a : P(F) = $\frac{9}{10}$ or : P($\bar{F}$) =1−P(F).

Donc : P($\bar{F}$) =1− $\frac{9}{10}$

$$P(\bar{F}) = \frac{1}{10}.$$

2.*a*) ***Probabilité de T∩F***

On a : P_F (T) = 1

Or : P(T∩F) = P_F (T) × P(F)

= 1 × $\frac{9}{10}$.

Donc : P(T∩F) = $\frac{9}{10}$.

b) ***Probabilité de T∩$\overline{F}$***

On a :$P_{\overline{F}}$(T) = $\frac{1}{11}$

P(T∩$\overline{F}$) = $P_{\bar{F}}$(t) ×P($\overline{F}$)

Donc : P(T∩F) = $\frac{1}{11} \times \frac{1}{10}$

$$P(T \cap \bar{F}) = \frac{1}{110}.$$

c) ***Probabilité de l'évènement T***

T = (T∩F) ∪(T∩$\bar{F}$) et (T∩F) ∩(T∩F) = ∅

D'après la loi des probabilités totales on a :

P(T) = P(T∩F) + P(T∩$\bar{F}$)

$= \frac{9}{10} + \frac{1}{110}$

P(T) = $\frac{10}{11}$.

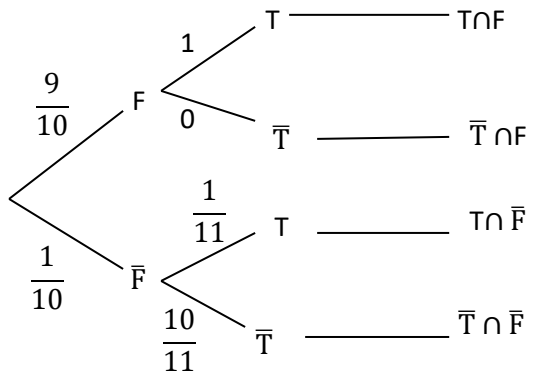
d) ***Probabilité de F sachant T***

On a : $P_T(F) = \frac{P(T \cap F)}{P(T)}$

$= \frac{\frac{9}{10}}{\frac{10}{11}}$

$= \frac{9}{10} \times \frac{11}{10}$.

Autre méthode : Arbre pondéré



D'après l'arbre pondéré :

1 .P($\bar{F}$) = $\frac{1}{10}$

2.*a*) P(T∩F) = $\frac{9}{10} \times 1$

P(T∩F) = $\frac{9}{10}$

b) P (T∩$\bar{F}$) = $\frac{1}{10} \times \frac{1}{11}$

P (T∩$\bar{F}$) = $\frac{1}{110}$

c) P(T) = $\frac{9}{10} + \frac{1}{110}$

P(T) = $\frac{10}{11}$.

Exercice 2

P(z) = $z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \propto$.

1. *a*) ***Détermination de a +b+c , ab+ bc + ac et abc***

P(z) = (z−*a*) (z−*b*) (z−*c*)

= $(z^2 - bz - az + ab)$ (z−*c*)

= $z^3 - cz^2 - bz^2 - az^2 + acz + abz + bcz - abc$

$= z^3 - (a+b+c)z^2 + (ac+ab+bc)z - abc$

Par identification

$(a+b+c) = -\alpha$, $ab + bc + ac = \beta$ et $-abc = \gamma$.

Autre méthode

Résoudre le système

$$\begin{cases} P(a) = 0 \\ P(b) = 0 \\ P(c) = 0 \end{cases}$$

On a : $a+b+c = -\alpha$; $ab + bc + ac = \beta$ et $abc = -\propto$.

b) ***Ecriture du polynôme P(z)***

On a :

$*-\alpha = a + b + c$

$-\alpha = 1 + 3i\sqrt{3} - 2 + i\sqrt{3} + 4 - 2i\sqrt{3}$

$-\alpha = 3 + 2i\sqrt{3}$

$\alpha = -3 - 2i\sqrt{3}$.

$* \ \beta = ab + bc + ac$

$= (1 + 3i\sqrt{3})(-2 + i\sqrt{3}) + (-2 + i\sqrt{3})(4 - 2i\sqrt{3}) + (1 + 3i\sqrt{3})(4 - 2i\sqrt{3})$

$= -2 + i\sqrt{3} - 6i\sqrt{3} - 9 + (-8 + 4i\sqrt{3} + 4i\sqrt{3} + 6) + 4 - 2i\sqrt{3} + 12i\sqrt{3} + 18$

$\beta = 9 + 13i\sqrt{3}$.

$* - \gamma = abc$

$-\gamma = (1 + 3i\sqrt{3})(-2 + i\sqrt{3})(4 - 2i\sqrt{3})$

$-\gamma = (11 - 5i\sqrt{3})(4 - 2i\sqrt{3})$

$-\gamma = -44 - 30 - 20i\sqrt{3} + 22\, i\sqrt{3}$

$-\gamma = -74 - 2i\sqrt{3}$

$\gamma = 74 + 2i\sqrt{3}$.

Donc : $P(z) = z^3 + (-3 - 2i\sqrt{3})z^2 + (9 + 13i\sqrt{3})z + 74 - 2i\sqrt{3}$.

Autre méthode

$P(z) = (z - 1 - 3i\sqrt{3})(z + 2 - i\sqrt{3})(z - 4 + 2i\sqrt{3})$

Développer et réduire pour obtenir la forme demandée.

2.*a*) ***Nature du triangle ABC***

ABC est un triangle rectangle en B si et seulement si $\frac{b-a}{b-c}$ est un imaginaire pur

$$\frac{b-a}{b-c} = \frac{-2+i\sqrt{3}-1-3i\sqrt{3}}{-2+i\sqrt{3}-4+2i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-3-2i\sqrt{3}}{-6+3i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(-3-2i\sqrt{3})(-6-3i\sqrt{3})}{36+27}$$

$$\frac{\mathrm{b-a}}{\mathrm{b-c}} = \frac{18+9i\sqrt{3}+12i\sqrt{3}-18}{63}$$

$$= \frac{21i\sqrt{3}}{63}$$

$$\frac{\mathrm{b-a}}{\mathrm{b-c}} = \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{3}.$$

$\frac{\mathrm{b-a}}{\mathrm{b-c}}$ est un imaginaire pur donc ABC est un triangle rectangle en B.

Autres Méthodes

*Théorème de Pythagore (On justifie que : $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{AC}^2$)

*Produit scolaire (On justifie que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0$).

b) ***Forme trigonométrique de*** $\boldsymbol{\frac{c-a}{b-a}}$

On a : $\frac{\mathrm{c-a}}{\mathrm{b-a}} = \frac{4-2i\sqrt{3}-1-3i\sqrt{3}}{-2+i\sqrt{3}-1-3i\sqrt{3}}$

$$= \frac{3-5i\sqrt{3}}{-3-2i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(3-5i\sqrt{3})(-3+2i\sqrt{3})}{21}$$

$$= \frac{21+21i\sqrt{3}}{21}$$

$\frac{\mathrm{c-a}}{\mathrm{b-a}} = 1+i\sqrt{3}$.

On a : $|1 + i\sqrt{3}| = 2$;

Posons : $\theta = \mathrm{Arg}\,(1+i\sqrt{3})$; on a : $\begin{cases} Cos\,\theta = \frac{1}{2} \\ sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} Cos\ \theta = \dfrac{1}{2} \\ sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$$

On a: $\frac{c-a}{b-a}$ = 2 (cos $\frac{\pi}{3}$ +i sin$\frac{\pi}{3}$).

c) ***Calcul de*** $\frac{AC}{AB}$

$\frac{AC}{AB} = \left|\frac{c-a}{b-a}\right|$

$= \left|1 + i\sqrt{3}\right|$

= 2 donc : $\frac{AC}{AB}$ = 2.

Calcul Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$

Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$=Arg($\frac{c-a}{b-a}$)

Donc : Mes$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$= $\frac{\pi}{3}$.

3.*a*) ***Ecriture complexe de s***

Soit z'= u z + v l'écriture complexe de *s*.

Méthode 1

On a : u = k(cosθ+$i$sinθ) avec $k = \frac{AC}{AB}$ et θ = Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ et $v = z_A(1-u)$

D'après la question **2**.*c*) on a : u = *2*(cos$\frac{\pi}{3}$+$i$sin $\frac{\pi}{3}$)

=1+ i$\sqrt{3}$

et $v = \left(1 + 3i\sqrt{3}\right)(-i\sqrt{3})$ = $9 - i\sqrt{3}$

donc : z'= (1+ i$\sqrt{3}$)z + $9 - i\sqrt{3}$

Méthode2

s(A) = A ⇔ z_A= uz_A+v et S(B) = C ⇔ z_C= uz_C+v.

On en déduit le système suivant : $\begin{cases} 1 + 3i\sqrt{3} = u\left(1 + 3i\sqrt{3}\right) + v \\ 4 - 2i\sqrt{3} = u\left(-2 + i\sqrt{3}\right) + v \end{cases}$

$$\begin{cases} 1+3i\sqrt{3} = u(1+3i\sqrt{3})+v \\ 4-2i\sqrt{3} = u(-2+i\sqrt{3})+v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+3i\sqrt{3} = u(1+3i\sqrt{3})+v \text{ (I)} \\ -4+2i\sqrt{3} = u(2-i\sqrt{3})-v \text{ (II)} \end{cases}$$

La somme des équations (I) et (II) donne : $-3+5i\sqrt{3} = u(3+2i\sqrt{3})$.

$-3+5i\sqrt{3} = u(3+2i\sqrt{3}) \Leftrightarrow u = \frac{-3+5I\sqrt{3}}{3+2i\sqrt{3}}$

$u = 1+ i\sqrt{3}$.

$v = (1+3i\sqrt{3}) - (1+i\sqrt{3})(1+3i\sqrt{3})$

$= (1+3i\sqrt{3})(1-1-3i\sqrt{3})$

$v = -i\sqrt{3}(1+3i\sqrt{3})$

$v = 9 - i\sqrt{3}$.

On en déduit : z'= $(1+ i\sqrt{3})z + 9 - i\sqrt{3}$

b) ***Calcul de l'affixe du point B_1***

$z_B = (1+ i\sqrt{3})z_{B_1} + 9 - i\sqrt{3}$

$z_{B_1} = \frac{z_B - 9 + i\sqrt{3}}{1+ i\sqrt{3}}$

$= \frac{-2+i\sqrt{3}-9+i\sqrt{3}}{1+ i\sqrt{3}}$

$= \frac{-11+2i\sqrt{3}}{1+ i\sqrt{3}} = \frac{(-11+2i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{4}$

$z_{B_1} = -\frac{5}{4} + \frac{13i\sqrt{3}}{4}$

Problème

PartieA

$g(x) = -x^2 + 6 - 4\ln x$

1. ***Sens de variation de g***

On a : $Dg =]0;+\infty[$

$\forall x \in Dg,\ g'(x) = -2x - \frac{4}{x}$

$= -2(x + \frac{2}{x})$

$\forall x \in Dg, x + \frac{2}{x} > 0$ donc : $\forall x \in Dg, g'(x) < 0$.

Conclusion : g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

2 .***Calcul des limites de g***

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0}(-x^2 + 6 - 4\ln x)$

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0}(-x^2 + 6) = 6$ et $\lim\limits_{x \to 0}(-4\ln x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}(-x^2 + 6 - 4\ln x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty}(-x^2 + 6) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}(-4\ln x) = -\infty$

Tableau de variation de g

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		-	
$g(x)$		$+\infty$ ↘ $-\infty$	

3.***Existence de solution unique***

g est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et $g(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$.

Puisque $0 \in]-\infty, +\infty[$, on conclut que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0, +\infty[$.

Encadrement de α

On a : $1{,}86 \in]0, +\infty[$ et $1{,}87 \in]0, +\infty[$

De plus : $g(1{,}86) \simeq 0{,}058$ et $g(1{,}87) \simeq -0{,}0006$.

Ainsi : $g(1{,}86) \times g(1{,}87) < 0$.

On déduit : $1{,}86 \leq \alpha \leq 1{,}87$.

4. ***Signe de g***

g étant strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et $g(\alpha) = 0$ conduisent à : $\forall x \in]0, \alpha[$; $g(x) > 0$

$\forall\, x \in]\alpha, +\infty[$; $g(x) < 0$.

Autre méthode : *utilisation du tableau de variation.*

Partie B

$f :]0, +\infty[\to \mathrm{IR}$

$x \mapsto -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2\ln x - 1}{x}$.

1. *a*) ***Calcul de f'(x)***

$\forall\, x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{2}{x}\times x - (2\ln x - 1)}{x^2}$

$= -\frac{1}{2} + \frac{2 - 2\ln x + 1}{x^2}$

$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3 - 2\ln x}{x^2}$.

Expression de f'(x) en fonction de g(x)

$\forall\, x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{x^2 + 6 - 4\ln x}{2x^2}$

$f'(x) = \frac{g(x)}{2X^2}$.

b) ***Sens de variation de f***

$\forall\, x \in]0, +\infty[$, $2x^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le signe de $g(x)$.

Alors d'après la question ***A***- **4**. on a : $\forall\, x \in]0, \alpha]$, $f'(x) \geq 0$ donc f est strictement croissante sur $]0, \alpha]$ et $\forall\, x \in [\alpha, +\infty[$, $f'(x) \leq 0$ donc f est strictement décroissante sur $[\alpha, +\infty[$.

c) ***Limites de f en 0***

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(-\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2\ln x - 1}{x}\right)$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(-\frac{1}{2}x + 3 + \frac{1}{x}(2\ln x - 1)\right)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(-\frac{1}{2}x + 3\right) = 3$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$ et

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left((2\ln x - 1)\right) = -\infty$.

Limites de f en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-\frac{1}{2}x + 3 + \frac{2\ln x}{x} - \frac{1}{x})$

= -∞ car $\lim\limits_{x\to+\infty} (-\frac{1}{2}x + 3) = -\infty$. , $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2\ln x}{x}\right) = 0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} (-\frac{1}{x}) = 0$.

2.*a*) ***Asymptote à (C)***

On a: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - (-\frac{1}{2}x + 3)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} (2\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x})$

= 0

d'où la droite (D) d'équation y = $-\frac{1}{2}x + 3$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

b) ***Position de (C) par rapport à (D)***

Posons : $u(x) = f(x) - (-\frac{1}{2}x + 3)$.

On a: $u(x) = \frac{\ln x - 1}{x}$.

$\forall\, x \in\ ]0, +\infty[\,, x > 0$ donc $u(x)$ a le signe de $2\ln x - 1$

$2\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{e}$

Tableau de signe de u

x	0		$\sqrt{e}$	$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	+

- $\forall\, x \in\ ]O, \sqrt{e}[\,, u(x) < 0$ donc (C) est en-dessous de (D)
- $\forall\, x \in\ ]\sqrt{e}, +\infty[\,, u(x) > > 0$ donc (C) est au-dessus de (D)
- Pour $x = \sqrt{e}$, (C) coupe (D).

c) ***Coordonnées du point d'intersection de (C) et (D)***

Posons A(x ;y). D'après la question précédente $x = \sqrt{e}$.

Pour $x = \sqrt{e}$, $y = f(\sqrt{e})$.

Or : $f(\sqrt{e}) = \frac{\sqrt{e}}{2} + 3$ donc : A($\sqrt{e}$;$-\frac{\sqrt{e}}{2} + 3$) .

3.*a*) ***Expression de lnα***

On a : $g(\alpha) = 0$

$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\alpha^2 + 6 - 4ln\alpha = 0$ donc : $ln\alpha = \frac{6-\alpha^2}{4}$.

Expression de $f(\alpha)$

On a : $f(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha + 3 + \frac{2ln\alpha - 1}{\alpha}$

$$= -\frac{1}{2}\alpha + 3 + \frac{\frac{6-\alpha^2}{2} - 1}{\alpha}$$

$$= -\frac{1}{2}\alpha + 3 + \frac{4-\alpha^2}{2\alpha}$$

$f(\alpha) = -\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha}$.

b) $h(x) = -x + 3 + \frac{2}{x}$ pour $x \in$]0 ; +∞[.

b$_1$) ***Sens de variation de h***.

h est dérivable sur]0 ; +∞[comme somme de fonctions dérivables sur]0 ; +∞[.

On a : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $h'(x) = -1 - \frac{2}{x^2}$

$$= -(\frac{x^2+2}{x^2}).$$

$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $x^2 > 0$ et $x^2 + 2 > 0$ donc $h'(x) < 0$.

On en déduit que *h* est strictement décroissante sur]0 ; +∞[.

b$_2$) ***Encadrement de $f(\alpha)$***

h est dérivable et décroissante sur]0 ; +∞[et 1,86≤ $\boldsymbol{\alpha}$ ≤1,87 alors $h(1,87) \leq h(\boldsymbol{\alpha}) \leq h(1,86)$

or $h(1,87) \approx 2,199$ et $h(1,86) \approx 2,215$ donc : $2,199 \leq f(\alpha) \leq 2,216$.

4.*a*) ***Tableau de variation de*** *f*

x		0		α		$+\infty$
$f'(x)$			+	0	−	
$f(x)$		- ∞	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

b) ***Calcul de $f(\frac{1}{e})$***

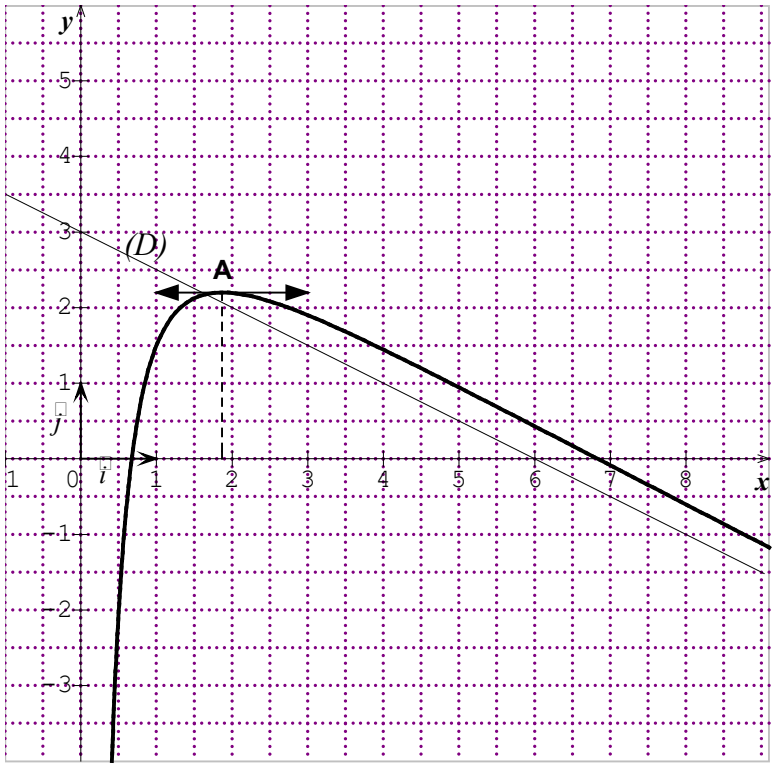
$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{2e} + 3 - 3e$

Calcul de $f(1)$

$f(1) = \frac{3}{2}$

Conclusion : On a :$f(\frac{1}{e}) \times f(1) < 0$ et $1 < \alpha$ donc (C) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse β tel que $\beta \in]\frac{1}{e}; 1[$.

c) ***Construction de (C) et (D)***



Partie C

Soit $k(x) = f(x) - (\frac{1}{2}x + 3)$.

1 .***Calcul de $I_0 = \int_{\sqrt{e}}^{e} k(x)dx$***

$$I_0 = \int_{\sqrt{e}}^{e} \left(\frac{2lnx}{x} - \frac{1}{x}\right) dx = [ln^2(x) - lnx]_{\sqrt{e}}^{e}$$

$= 0 - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2})$

$I_0 = \frac{1}{4}$.

2.***Interprétation géométrique de I_0***

I_0 est la valeur en unité d'aire de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives : $x = \sqrt{e}$ et $x = e$.

3. Soit $a_n = e^{\frac{n+1}{2}}$, ∀∈ IN

a) ***Calcul de I_n***

D'après la question 1. On a : $I_n = [ln^2(x) - lnx]_{a_n}^{a_{n+1}}$

$$= \left[(\frac{n+2}{2})^2 - \frac{n+2}{2}\right] - \left[(\frac{n+1}{2})^2 - \frac{n+1}{2}\right]$$

$$= \frac{n^2+4n+4}{4} - \frac{n+2}{2} - (\frac{n^2+2n+1}{4} - \frac{n+1}{2})$$

$$= \frac{n^2+2n}{4} - \frac{n^2-1}{4}$$

Donc : $I_n = \frac{2n+1}{4}$.

b) ***Nature de la suite (I_n)***

(I_n) est une suite arithmétique ssi ∀∈IN , $I_{n+1} - I_n$ est constante.

$I_n = \frac{2n+1}{4}$ et $I_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{4} = \frac{2n+3}{4}$

$d'o$ù: $I_{n+1} - I_n = \frac{2n+3}{4} - \frac{2n+1}{4}$

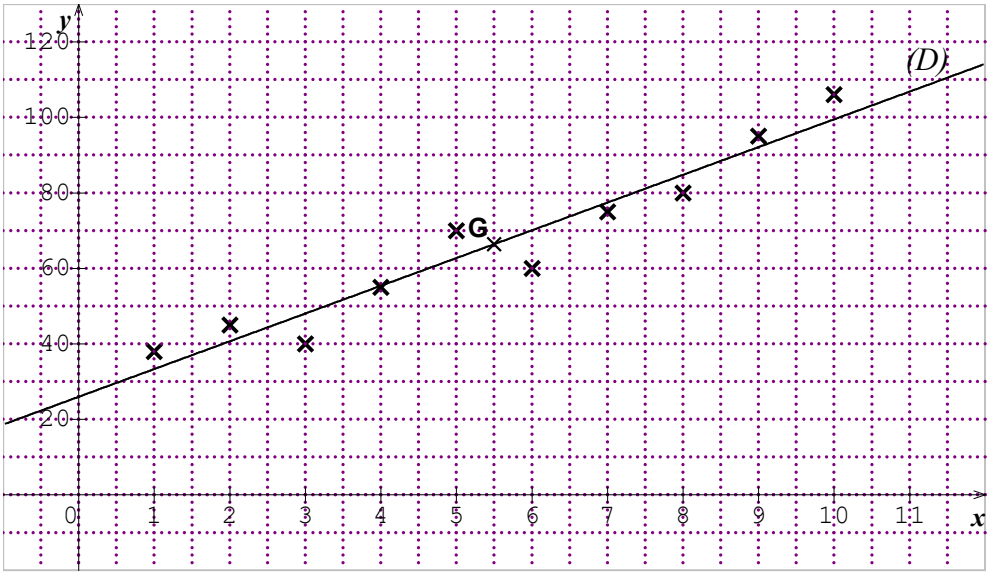
$= \frac{1}{2}$

donc (I_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$.

CORRIGE BAC D TOGO 2012

Exercice 1

1.*a)* ***Représentation du nuage de points***



b) ***Coordonnées du point moyen G***

$\bar{x}$= $\frac{1}{10}$ (1 +2+ 3+ 4+ 5+ 6+ 7+ 8+ 9 +10)

$\bar{x}$ = 5,5

$\bar{y}$ = $\frac{1}{10}$ (38 +45+40+ 55+ 70+ 60+ 75+ 80 +95+106)

$\bar{y}$ = 66,4 donc G(5,5 ; 66,4).

2. *a)****Coefficient de corrélation r***

r = $\frac{Cov(x;y)}{\sqrt{V(x).V(y)}}$ **avec :**

Cov(x,y) = $\frac{1}{N}\sum n_i x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$

V(x) = $\frac{1}{N}\sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2$

V(y) = $\frac{1}{N}\sum n_i y_i^2 - \bar{y}^2$

	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
	1	38	38	1	1444
	2	45	90	4	2025
	3	40	120	9	1600
	4	55	220	16	3025
	5	70	350	25	4900
	6	60	360	36	3600
	7	75	525	47	5625
	8	80	640	64	6400
	9	95	855	81	9025
	10	106	1060	100	11236
Total	55	664	4258	385	48880

Cov(x,y) = 60,6 ; V(x) =8,25 , V(y) = 479,04 et r = 0,97. On a : 0,87< r <1.

On en déduit qu'il ya une forte corrélation.

b) ***Equation de la droite de régression de y en fonction de x***

(D) : $y = ax + b$

$a = \frac{cov(x;y)}{V(x)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$

a = 7,35 et b= 25,98 d'où (D) : $y = 7{,}35x + 25{,}98$

c) Voir figure.

3.

a) ***Estimation du prix***

En 2016 , on a : $x = 15$

$y = 7{,}35 \times 15 + 25{,}98$

$y = 136{,}23$.

b) ***Estimation de l'année***

$y = 7{,}35x + 25{,}98$

$y > 180 \Leftrightarrow 7{,}35x + 25{,}98 > 180$

$\Leftrightarrow x > 20{,}98$.

Donc en 2022 le prix dépassera 180$.

Exercice 2

$z \in \mathbb{C}$, $z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$

1.*a*)

On a : $i^3 - (4+i)i^2 + (13+4i)i - 13i = -i + 4 + i + 13i - 4 - 13i = 0$ donc i est une solution de (E).

b) ***Détermination des nombres réels a, b et c***

$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(az^2 + bz + c)$

$= az^3 + (b - ia)z^2 + (-ib + c)z - ic$

Par identification on a : $\begin{cases} a = 1 \\ -4 - i = b - i \\ -ib + c = 13 + 4i \\ -13i = -ic \end{cases}$

On trouve : $a = 1$; $b = -4$ et $c = 13$

Autre méthode : la division euclidienne

*c)**Résolution de l'équation (E)***

$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0 \Leftrightarrow (z - i)(z^2 - 4z + 13) = 0$

$\Leftrightarrow z - i = 0$ ou $z^2 - 4z + 13 = 0$

$z - i = 0 \quad \Leftrightarrow z = i$

Résolution de : $z^2 - 4z + 13 = 0$

Méthode 1

$\Delta = (-4)^2 - 4\times 13 = -36 = (6i)^2$

$z_1 = \frac{4+6i}{2} = 2+3i$ et $z_2 = \frac{4-6i}{2} = 2-3i$

Méthode 2

$\Delta' = (-2)^2 - 13 = -9 = (3i)^2$

$z_1 = 2+3i$ et $z_2 = 2-3i$

S(E) = $\{ i,\ 2-3i\ ,\ 2+3i \}$.

2. *a*) ***Affixe du point A′ image de A***

$A' = r(A) \Leftrightarrow z_{A'} - z_B = e^{i\frac{\pi}{4}}(z_A - z_B)$

$\Leftrightarrow z_{A'} = 2+(3-2\sqrt{2})i$.

b) ***Calcul de*** $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_{A'}}$

$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_{A'}} = \frac{2+3i-2+3i}{2+3i-2-(3-2\sqrt{2})i} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_{A'}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow z_B - z_C = \frac{3\sqrt{2}}{2}(z_B - z_{A'})$ d'où l'existence de l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ qui transforme A' en C.

3. *a*) ***Image de A par s***

s(A) = *hor*(A)

= *h*[*r*(A)]

= *h*(*A′*)

s(A) = C.

Donc s est une similitude directe plane de centre B, de rapport $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

Problème

Partie A

1.*a*) ***Calcul de la limite de f_k en +∞***

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)$ = -∞ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}$= 0 et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k$ = +∞.

b) ***Calcul de la limite de f_k en -∞***

cas k pair

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)$ = +∞ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$.

cas k impair

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)$ = -∞ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$.

2. ***Dérivée de f_k***

$f'_k(x) = kx^{k-1}(e^{-x} - \frac{1}{2}) - x^k(e^{-x})$

$= x^{k-1}((\mathrm{k}-x)e^{-x} - \frac{k}{2})$

$= x^{k-1}\, g_k(x)$

3. $g_k(x) = (\mathrm{k}-x)e^{-x} - \frac{k}{2}$

a) ***Sens de variation de g_k***

D_{g_k}= IR

Dérivée de g_k

$g'_k(x) = e^{-x} - (k-x)e^{-x}$

$= (x-k-1)e^{-x}$

$g'_k(x)$ est du signe de $x-k-1$ car : $\forall x \in$IR , e^{-x}>0 .

Tableau de signe

x	-∞		k+1		+∞
$x-k-1$		-	0	+	
$g'_k(x)$		-	0	+	

$\forall x \in$]-∞, k+1], $g'_k(x) \leq 0$ donc g_k est strictement décroissante sur]-∞, k+1]

$\forall x \in$ [k+1, +∞[, $g'_k(x) \geq 0$ donc g_k est strictement croissante sur [k+1, +∞[

b) ***Existence de solution unique***

$g_k(k+1)$=-($e^{-k-1}+\frac{k}{2}$) , $\lim_{x\to-\infty} g_k(x)$= +∞ et $\lim_{x\to+\infty} g_k(x)$= -$\frac{k}{2}$

b) D'après la question **3** .*a*) , g_k est continue et strictement décroissante sur]-∞, k+1],donc g_k est une bijection de]-∞, k+1] sur [-$e^{-k-1}-\frac{k}{2}$, +∞[or 0∈ [$-e^{-k-1}-\frac{k}{2}$, +∞[donc l'équation

$g_k(x)$= 0 admet une solution unique α_k dans]-∞, k+1] .

Par ailleurs 0∉ [$-e^{-k-1}-\frac{k}{2}$, $-\frac{k}{2}$[alors l'équation $g_k(x)$= 0 n'admet pas de solution dans [k+1, +∞[.

Or $g_k(0)=\frac{k}{2}$ et $g_k(0)>g_k(\alpha_k)$, de plus g_k est strictement décroissante sur]-∞, k+1] donc $\alpha_k>0$.

On conclue que l'équation $g_k(x)$= 0 admet une solution unique α_k positive.

c) ***Signe de g_k***

∀ x ∈]-∞, α_k[, $g_k(x)$ >0 , ∀ x ∈] α_k , +∞ [, $g_k(x)$ < 0 et $g_k(\alpha_k)$ =0.

Signe de f'_k

Cas *k* impair

x	-∞	0		α_k	+∞
x^{k-1}	+	0	+		+
$g_k(x)$	+		+	0	-
$f'_k(x)$	+	0	+	0	-

On conclue que :

Pour *k* impair : ∀ x ∈]-∞, α_k[, $f'_k(x)$ ≥0 et ∀ x ∈ [α_k , +∞ [, $f'_k(x)$ ≤ 0 .

Cas *k* pair

x	-∞	0		α_k	+∞
x^{k-1}	-	0	+		+
$g_k(x)$	+		+	0	-
$f'_k(x)$	-	0	+	0	-

On conclue que :

Pour *k* pair : ∀ x ∈]0, α_k[, $f'_k(x)$ >0, ∀ x ∈]-∞, 0]∪ [α_k , +∞ [, $f'_k(x)$ ≤ 0 .

d) ***Tableau de variation de f_k***

cas *k* impair

x	-∞	α_k	+∞
$f'_k(x)$	+	0	-

$f_k(x)$	↗ -	$f_k(\alpha_k)$	↘ -∞

Cas k pair

x	-∞	0		α_k	+∞
$f'_k(x)$	-		+	0	-
$f_k(x)$	+∞ ↘	0	↗	$f_k(\alpha_k)$	↘ -∞

Partie B

1.*a*) ***Encadrement de*** $\boldsymbol{\alpha_1}$

$g_1(0) = \frac{1}{2}$, $g_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(e^{-\frac{1}{2}} - 1) < 0$

$g_1(0) \times g_1(\frac{1}{2}) < 0$ d'où d'après la question A **3**.*b*) on a : $0 < \alpha_1 < \frac{1}{2}$.

b) $g_1(\alpha_1) = 0 \Leftrightarrow (1-\alpha_1)e^{-\alpha_1} - \frac{1}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow e^{-\alpha_1} = \frac{1}{2(1-\alpha_1)}$$

$$f_1(\alpha_1) = \alpha_1 e^{-\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{2}$$

$$= \alpha_1\left(\frac{1}{2(1-\alpha_1)}\right) - \frac{\alpha_1}{2}$$

$$= \frac{{\alpha_1}^2}{2(1-\alpha_1)}$$

c) ***Tableau de variation de*** $\boldsymbol{f_1}$

x	-∞	α_1	+∞
$f'_1(x)$	+	0	-
$f_1(x)$	-∞ ↗	$\frac{{\alpha_1}^2}{2(1-\alpha_1)}$	↘ -∞

2. ***Asymptote à*** $\boldsymbol{(C_1)}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f_1(x) + \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0.$$

Donc la droite (D) d'équation y = - $\frac{x}{2}$ est une asymptote oblique à (C_1) en $+\infty$.

3. *Unicité de la solution de l'équation φ(x) = x*

a) *Méthode 1*

D'après les questions **A 3**,*b*) et **B 1**.*a*) , α_1 est le seul élément de [0, $\frac{1}{2}$] tel que $g_1(\alpha_1) = 0$.

$g_1(\alpha_1) = 0 \Leftrightarrow (1-\alpha_1)e^{-\alpha_1} - \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \alpha_1 - \frac{e^{\alpha_1}}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{e^{\alpha_1}}{2} = \alpha_1$

$\Leftrightarrow \varphi(\alpha_1) = \alpha_1$ d'où α_1 est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$

Méthode 2

$x \in [0, \frac{1}{2}]$, $\varphi(x) = x \Leftrightarrow x \in [0, \frac{1}{2}]$,$1 - \frac{e^x}{2} = x$

$\Leftrightarrow x \in [0, \frac{1}{2}]$, $e^{-x} - \frac{1}{2} = xe^{-x}$

$\Leftrightarrow x \in [0, \frac{1}{2}]$, $(1-x)\, e^{-x} - \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow x \in [0, \frac{1}{2}]$, $g_1(x) = 0$

Or d'après les questions **A 3**. *b*) et **B 1**. *a*) , α_1 est l'unique solution de l'équation: $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $g_1(x) = 0$

Donc α_1 est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$.

b) ***Appartenance de φ(x) à [0, $\frac{1}{2}$]***

$x \in [0, \frac{1}{2}] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow e^0 \leq e^x \leq e^{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}e^x \leq \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} \leq -\frac{1}{2}e^x \leq -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} \leq 1 - \frac{1}{2}e^x \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 0 < 1 - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} \leq 1 - \frac{1}{2}e^x \leq \frac{1}{2}$

d'où $0 \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\varphi(x)$ est élément de $[0, \frac{1}{2}]$.

c) ***Majoration de*** $|\varphi'(x)|$

$\varphi'(x) = -\frac{e^x}{2}$ et $|\varphi'(x)| = \frac{e^x}{2}$

$x \in [0, \frac{1}{2}] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow e^0 \leq e^x \leq e^{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}e^x \leq \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{e}}{2} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}e^x \leq \frac{\sqrt{e}}{2}$.

Donc : $\forall\ x \in [0, \frac{1}{2}]$, $|\varphi'(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}$.

4.*a*) ***Appartenance de*** $\boldsymbol{u_n}$ ***à*** $\boldsymbol{[0, \frac{1}{2}]}$

Démonstration par récurrence

$u_0 = 0$ donc $u_0 \in [0, \frac{1}{2}]$.

Supposons que pour n∈IN , $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$ et démontrons que : $u_{n+1} \in [0, \frac{1}{2}]$

D'après la question B 3.b) , si $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$ alors $\varphi(u_n) \in [0, \frac{1}{2}]$; or $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ d'où $u_{n+1} \in [0, \frac{1}{2}]$.

On conclue que (u_n) est une suite d'éléments de $[0, \frac{1}{2}]$.

b) On a : $\forall\ x \in [0, \frac{1}{2}]$, $|\varphi'(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}$, $\forall\ n \in$IN, $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$ et $\alpha_1 \in [0, \frac{1}{2}]$

En appliquant les inégalités des accroissements finis à φ sur $[0, \frac{1}{2}]$

On a : $|\varphi(u_n) - \varphi(\alpha_1)| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}|u_n - \alpha_1|$

Donc : $|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}|u_n - \alpha_1|$.

c)

Démonstration par récurrence

Pour n = 0 on a : $|u_0 - \alpha_1| = \alpha_1 \leq \frac{1}{2}$

donc : $|u_0 - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{e}}{2})^0$.

Supposons que : $\forall\ n \in$IN*, $|u_n - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{e}}{2})^n$ et démontrons que : $|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{e}}{2})^{n+1}$.

$|u_n - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{e}}{2})^n \Leftrightarrow \frac{\sqrt{e}}{2}|u_n - \alpha_1| \leq \frac{\sqrt{e}}{2} \times \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{e}}{2})^n$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{e}}{2}\,|u_n - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{e}}{2})^{n+1}$$

Or, d'après la question *b*), on a : $|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}|\,u_n - \alpha_1|$.

Donc : $|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{e}}{2})^{n+1}$

On conclue que : $\forall\, n \in$IN, $|u_n - \alpha_1| \leq \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{e}}{2})^n$.

Convergence et limite de la suite (u_n)

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{e}}{2})^n = 0$ car $\frac{\sqrt{e}}{2} \in\,]0, 1[$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha_1$ et par conséquent la suite (u_n) converge vers α_1.

5. *a*) ***Etude du signe de f_1***

$f_1(x) = xe^{-x} - \frac{x}{2} == (e^{-x} - \frac{1}{2})$

$e^{-x} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$

Tableau de signe

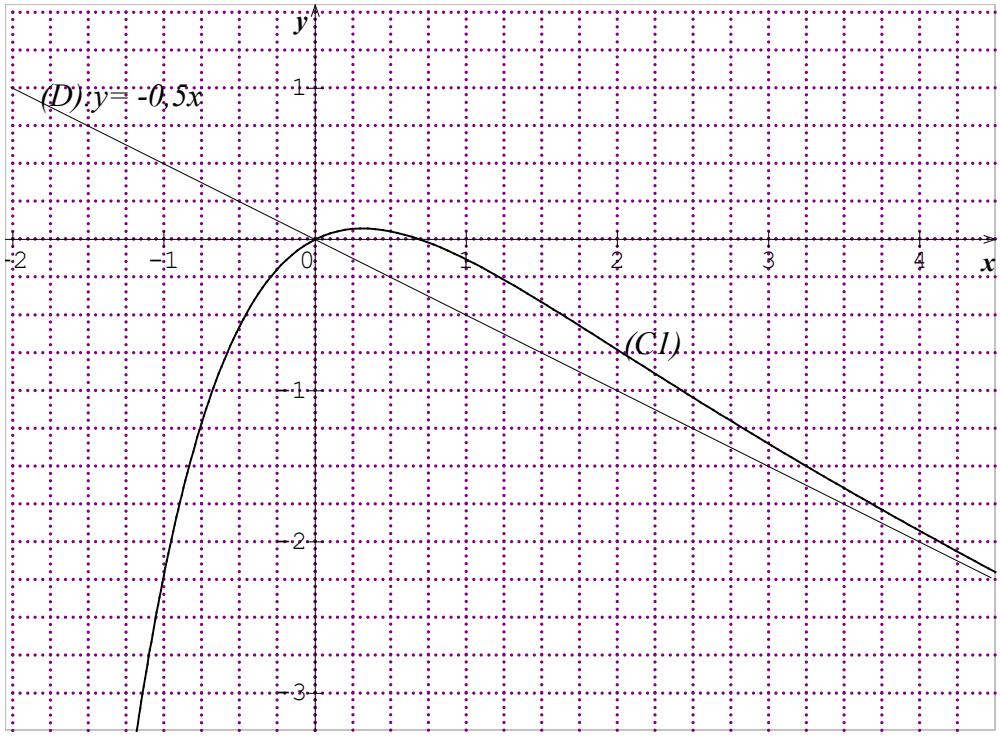
x	-∞ -	0	+	ln2	+ +∞
$e^{-x} - \frac{1}{2}$	+		+		-
$f_1(x)$	-		+		-

$\forall x \in$]-∞,0[∪]ln2,+∞[, $f_1(x) < 0$ et $\forall x \in$[0, ln2] , $f_1(x) \geq 0$.

b) ***Construction de (C_1) et (D)***

$\alpha_1 \approx 0{,}315$ et $f_1(\alpha_1) \approx 0{,}07$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f_1(x}{x} = +\infty$ donc (C_1) admet une branche parabolique dans la direction de (OJ).



6.*a*) ***Détermination des réels a et b***

H(x) = $(ax+b)e^{-x}$

H est dérivable sur IR, on a :

H'(x) = $ae^{-x} - (ax+b)e^{-x}$

= $(-ax + a - b)e^{-x}$

H'(x) = $xe^{-x} \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ a = -1 et b = -1.

b) ***Calcul d'aire***

$\mathcal{A} = (\int_0^{ln2} f_1(x)dx - \int_{ln2}^{2} f_1(x)dx) \times 16$ cm^2

$= (\int_0^{ln2}(xe^{-x} - \frac{x}{2})dx - \int_{ln2}^{2}(xe^{-x} - \frac{x}{2})dx) \times 16$ cm^2

$= ([(x-1)e^{-x} - \frac{x^2}{4}]_0^{lne} - [(x-1)e^{-x} - \frac{x^2}{4}]_{lns}^{2}) \times 16$ cm^2

$\mathcal{A} = 16(3e^{-2} + 1 - \ln 2 - \frac{(ln2)^2}{2})$.

CORRIGE BAC D TOGO 2013

Exercice 1

1. ***Résolution d'équation dans*** $\mathbb{C}$

$(1+i)z^2 - 2i(a+1)z+(i-1)(a^2+1)= 0$, a étant un nombre complexe

$\Delta' = [i(a+1)]^2 - (1+i)(i-1)(a^2+1)$

$= a^2 - 2a+1$

$= (a-1)^2$.

$a-1$ est une racine carrée de Δ'. Les solutions sont donc :

$z_1 = \frac{i(a+1)-a+1}{1+1} = 1+ia$

$z_2 = \frac{i(a+1)+a-1}{1+1} = a+i$.

S = $\{1+ia\ ; a+i\}$ si $a \neq 1$; S = $\{1+i\}$ si $a = 1$.

2. ***Relation entre*** $\boldsymbol{z_1}$ ***et*** $\boldsymbol{z_2}$

- Si $a \neq 1$, $\begin{cases} z_1 = 1+ia \\ z_2 = a+i \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} iz_1 = i-a \\ z_2 = a+i \end{cases} \Longrightarrow (iz_1 + z_2 = 2i \text{ ou } -z_1 + iz_2 = -2)$.

Ou encore

$\begin{cases} z_2 = 1+ia \\ z_1 = a+i \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} iz_2 = i-a \\ z_1 = a+i \end{cases} \Longrightarrow (iz_2 + z_1 = 2i \text{ ou } -z_2 + iz_1 = -2)$.

- Si $a = 1$, $z_2 = z_1$.

3. ***Caractérisation de la transformation*** $\boldsymbol{f}$

$f(M_1) = M_2$ donc f a pour écriture complexe : $z_2 = -iz_1 + 2i$

$$z_2 = e^{-\frac{\pi}{2}} z_1 + 2i$$

f est la rotation d'angle orienté de mesure $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $z_\Omega = \frac{2i}{1+i} = 1+i$.

Pour $z_1 = 1+ia$ et $z_2 = a+i$ f a pour écriture complexe : $z_2 = iz_1 + 2$ et f est la rotation d'angle orienté de mesure $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $z_\Omega = 1+i$.

4. $z_2 = -iz_1 + 2i$

a) ***Expression de*** $\boldsymbol{x'}$ ***et*** $\boldsymbol{y'}$ ***en fonction de x et y***

$z_2 = x' + iy'$ *et* $z_1 = x+iy$; on a :

$x' + iy' = -i(x+iy) + 2i$

$= -ix+y+2i = y+(2-x)i$ d'où : $x' = y$ et $y' = 2-x$

Remarque : Pour $z_2 = iz_1+2$ on a : $x' = 2-y$ et $y' = x$.

b) ***Image de la droite d'équation x+2y −1= 0***

Soit $M_1(x;y) \in (D)$et $M_2(x';y')$)=$f(M_1)$. On a :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x' \\ x = -y'+2 \end{cases}$$

$M_1 \in (D) \Leftrightarrow x+2y-1=0$

$\Leftrightarrow (-y'+2)+2x'-1=0$

$\Leftrightarrow 2x'-y'+1=0$

L'image de (D) par f est la droite (D') : $2x-y+1=0$.

Pour l'autre cas, on obtient la droite (D') d'équation: $2x-y-3=0$.

Exercice 2

(E) : $y''(x)-2my'(x)+3y(x) = 2(1-2x)e^x$

(E'): $y''(x)-2my'(x)+3y(x) = 0$, $m \in$ IR.

1. ***Résolution de l'équation (E')***

L'équation caractéristique d'inconnue complexe r associée à (E') est (E_1) : $r^2+2mr+3$.

$\Delta' = m^2-3$ $(m-\sqrt{3})$ $(m+\sqrt{3})$

- Pour $m \in \left]-\infty;-\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3};+\infty\right[$, $\Delta' > 0$ et (E_1) admet deux solutions réelles distinctes $r_1 = m-\sqrt{m^2-3}$ et $r_2 = m+\sqrt{m^2-3}$, les solutions de (E') sont les fonctions f définies par : $f(x) = Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$ où A et B sont des réels.
- Pour $m = -\sqrt{3}$, $\Delta' = 0$ et (E_1) admet une solution réelle double $r_0 = -\sqrt{3}$. Les solutions de (E') sont les fonctions f définies par : $f(x) = (Ax+B)e^{-\sqrt{3}x}$ où $(A,B) \in$ IR^2.
- Pour $m = \sqrt{3}$, $\Delta' = 0$ et (E_1) admet une solution double $r_0 = \sqrt{3}$. Les solutions de (E') sont les fonctions f définies par : $f(x) = (A\,x+B)e^{\sqrt{3}x}$ où $(A,B) \in$ IR^2.
- Pour $m \in \left]-\sqrt{3},\sqrt{3}\right[$, $\Delta' < 0$ et (E_1) admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = m-i\sqrt{3-m^2}$ et $r_2 = m+i\sqrt{3-m^2}$. Les solutions de (E') sont les fonctions f définies par : $f(x) = (A\cos(x\sqrt{3-m^2})+B\sin(x\sqrt{3-m^2}))e^{mx}$ où $(A,B) \in$ IR^2.

2. ***Détermination de m***

h est une solution de (E) équivaut à : $h''(x)-2mh'(x)+3h(x)=2(1-2x)e^x$,$\forall x \in$ IR

or : $h(x) = x^2e^x$, $h'(x) = (x^2+2x)e^x$ et $h''(x) = (x^2+4x+2)e^x$ donc on a :

$(x^2+4x+2)e^x - 2m\,(x^2+2x)e^x - 3x^2e^x = 2(1-2x)e^x$, $\forall x \in$ IR

ou $x^2(4-2m) + (8-4m)x = 0$, $\forall x \in$ IR

On en déduit : $\begin{cases} 4-2m=0 \\ 8-4m=0 \end{cases}$

D'où m = 2.

3. On prend m = 2

a)

a_1) φ est une solution de (E) équivaut à : $\varphi''(x) - 4\,\varphi'(x) + 3\,\varphi(x) = 2(1-2x)e^x$ or $h''(x) - 4h'(x) + 3h(x) = 2(1-2x)e^x$. On en déduit :

$$\varphi''(x) - h''(x) - 4(\varphi'(x) - h'(x)) + 3(\varphi(x) - h(x)) = 0$$

C'est-à-dire :$(\varphi - h)''(x) - 4(\varphi - h)'(x) + 3(\varphi - h)(x) = 0$ d'où $\varphi - h$ est solution de (E').

a_2) $\varphi - h$ est une solution de (E') équivaut à : $(\varphi - h)''(x) - 4(\varphi - h)'(x) + 3(\varphi - h)(x) = 0$

$$[\varphi''(x) - 4\,\varphi'(x) + 3\,\varphi(x)] - [h''(x) - 4h'(x) + 3h(x)] = 0$$

$\varphi''(x) - 4\varphi'(x) + 3\,\varphi(x) = h''(x) - 4h'(x) + 3h(x) = 2(1-2x)e^x$ d'où φ est solution de (E).

b) ***Résolution de l'équation (E')***

$2 \in]-\infty; -\sqrt{3}\,[\cup]\sqrt{3}\,; +\infty[$, les solutions de ($E_1$) sont r_1=1 et r_2=3

Les solutions de (E') sont les fonctions k définies par :

$k(x) = Ae^x + Be^{3x}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Résolution de l'équation (E)

Posons $\varphi - h = k$ on a : $\varphi(x) - h(x) = k(x) \Leftrightarrow \varphi(x) = h(x) + k(x)$

$$\varphi(x) = Ae^x + Be^{3x} + x^2e^x$$

Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions φ définies par :

$\varphi(x) = (A + x^2)e^x + Be^{3x}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

c) ***Solution particulière***

$\Omega(0; -1) \in (C_f) \Leftrightarrow f(0) = -1$

$\Leftrightarrow$ A+B = -1

La tangente à (C_f) en Ω a pour coefficient directeur 1 d'où $f'(0) = 1$.

or $f(x) = (A + x^2)e^x + Be^{3x}$ d'où $f'(x) = (x^2 + 2x + A)e^x + 3Be^{3x}$.

Donc : $f'(0) = 1 \Leftrightarrow A + 3B = 1$

$$\begin{cases} A + B = -1 \\ A + 3B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 1 \end{cases}$$

La solution particulière f de E est donc définie par :

$f(x) = (x^2 - 2)e^x + e^{3x}$.

4. $g(x) = (x^2 - 2)e^x + e^{3x}$ et U une primitive de : $x \mapsto 2(1 - 2x)e^x$

a) g est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $g''(x) - 4g'(x) + 3g(x) = 2(1 - 2x)e^x$

$$g'(x) - 4g(x) + 3G_1(x) = U(x) + c.$$

b) ***Expressions de U(x)***

$U(x) = (ax+b)e^x$; $U'(x) = (ax+b+a)e^x$

$U'(x) = 2(1 - 2x)e^x \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ a + b = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 6 \end{cases}.$$

Donc :$U(x) = (-4x + 6)e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

c) $G(x) = \frac{1}{3}[U(x) - g'(x) + 4g(x)] \Rightarrow G(x) = (x^2 - 2x)e^x + \frac{1}{3}e^{3x}$.

Problème

$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$, $\forall x \in [0; +\infty[$

A. $g(x) = x + 2 - e^x, \forall x \in [0; +\infty[$

1. ***Etude du sens de variation de g***

g est dérivable sur $[0; +\infty[$ et on a : $g'(x) = 1 - e^x$ pour $x \in [0; +\infty[$ or pour $x \in [0; +\infty[$, $e^x \geq 1$ d'où $g'(x) \leq 0$ et g est donc strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

Calcul de limite en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (x + 2 - e^x) = \lim_{x \to +\infty} e^x\left(\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} - 1\right)$$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ car $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} - 1\right) = -1$.

2.*a*) ***Existence de solution unique***

g est continue et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ avec $g(0) = 1$ et $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$.On a donc $g([0;+\infty[) =]-\infty;1]$ qui contient zéro. D'où l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0;+\infty[$.

b) ***Encadrement de α***

$[1{,}14;1{,}15] \subset [0;+\infty[$; $g(1{,}14)\approx 0{,}01$ et $g(1{,}15)\approx -0{,}08$

$g(1{,}14)\times g(1{,}15)<0$ et $g(\alpha) = 0$ donc : $1{,}14< \alpha <1{,}15$.

3. ***Etude du signe de g***

D'après 2. on a :

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	−

Pour $x \in [0;\alpha[$, $g(x)>0$;pour $x \in]\alpha;+\infty]$, $g(x)<0$ et $g(\alpha) = 0$.

B.1.*a*) ***Dérivée de f***

$f(x) = \frac{e^x-1}{xe^x+1}$, pour $x \in [0;+\infty[$,

f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout $x \in [0;+\infty[$, on a :

$f'(x) = \frac{e^x(xe^x+1)-(e^x-1)(1+x)e^x}{(xe^x+1)^2}$

$= \frac{(2+x-e^x)e^x}{(xe^x+1)^2}$ donc : $\forall\, x \in [0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$

b) ***Sens de variation de f***

Pour tout $x \in [0;+\infty[$, le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$ car $\forall\, x \in [0;+\infty[$, $\frac{e^x}{(xe^x+1)^2} > 0$.

Donc : Pour $x \in [0;\alpha[$, $f'(x)>0$

Pour $x \in]\alpha;+\infty]$, $f'(x)<0$.

Par conséquent f est strictement croissante sur $[0;\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.

2.*a*) ***Autre expression de f(x)***

$f(x) = \frac{e^x-1}{xe^x+1}$

$e^x.e^{-x} = 1$ d'où $\forall x \in [0;+\infty[, f(x) = \frac{e^x-e^x.e^{-x}}{xe^x+e^x.e^{-x}}$

$$f(x) = \frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(x+e^{-x})}.$$

Ainsi : $\forall x \in [0; +\infty[$, $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$.

b) ***Calcul de limite de f en*** $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-e^{-x}) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+e^{-x}) = +\infty$;

Interprétation graphique de la limite

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc la droite des abscisses est une asymptote à la courbe(C) en $+\infty$.

3.*a*) ***Calcul de f(α)***

$f(\alpha) = \frac{e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}+1}$ or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2+\alpha - e^{\alpha} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\alpha} = 2+\alpha \text{ donc : } f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}.$$

b) ***Encadrement de f (α)***

$1{,}14 < \alpha < 1{,}15$

$2{,}14 < \alpha + 1 < 2{,}15$

$$\frac{1}{2{,}15} < \frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{2{,}14}$$

$0{,}46 < f(\alpha) < 0{,}47$.

4. ***Equation de la tangente (T) à (C)au point d'abscisse 0***

(T) : $y = f'(0)\,x + f(0)$; or $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ donc une équation de (T) est $y = x$.

5.*a*) ***Expression de f(x)− x***

$$f(x) - x = \frac{e^x-1}{xe^x+1} - x = \frac{e^x-1-x^2e^x-x}{xe^x+1} = \frac{(1-x^2)e^x-(1+x)}{xe^x+1}$$

$$f(x) - x = \frac{(1+x)[(1-x)e^x-1]}{xe^x+1}$$

$= \frac{(1+x)[(e^x-xe^x-1]}{xe^x+1}$ d'où $f(x) - x = \frac{(1+x)\varphi(x)}{xe^x+1}$ avec $\varphi(x) = e^x - xe^x - 1$.

b) ***Etude du sens de variation de φ sur*** $[\mathbf{0}; +\infty[$

φ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $\varphi'(x) = -xe^x$ pour $x \in [0; +\infty[$.

Donc $\forall\, x \in [0; +\infty[$. $\varphi'(x) \leq 0$ et φ est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

***Signe de φ sur* [0; +∞[.**

φ est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ donc pour $x \in [0;+\infty[$, $\varphi(x) \leq \varphi(0)$

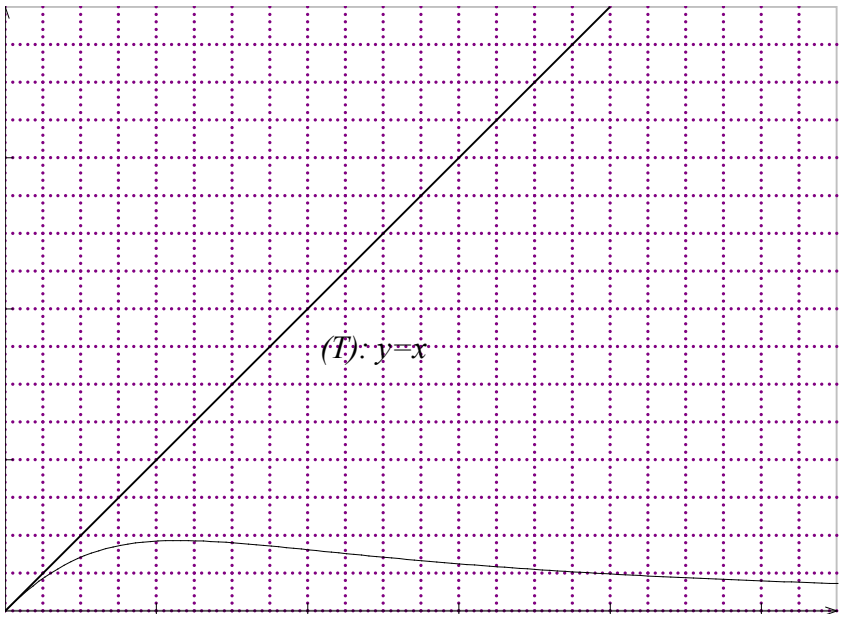
or $\varphi(0) = 0$ donc : $\forall\, x \in [0;+\infty[$. $\varphi(x) \leq 0$.

c) ***Position relative de (C) et (T)***

$f(x) - x = \frac{(1+x)\varphi(x)}{xe^x+1}$; le signe de $f(x) - x$ est celui de $\varphi(x)$ car $\frac{1+x}{xe^x+1} > 0$ pour $x \in [0;+\infty[$.

Donc pour $x \in [0;+\infty[$, $f(x) - x \leq 0$. Par conséquent (C) est au-dessous de (T) sur $[0;+\infty[$.

d) ***Tracé de (C) et (T)***



C.1. ***Détermination d'une primitive F de f sur* [0; +∞[**

$f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ pour $x \in [0;+\infty[$

$= \frac{(x+e^{-x})'}{x+e^{-x}}$ or pour $x \in [0;+\infty[$, $x+e^{-x} > 0$ donc la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par :

$F(x) = \ln(x+e^{-x})$ est une primitive de f.

2. ***Calcul d'aire***

(D) : $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) \leq y \leq x \end{cases}$

$\mathcal{A} = (\int_0^1 [x - f(x)]\, dx)$ua

$\mathcal{A} = \left[\frac{1}{2}x^2 - \ln(x + e^{-x})\right]_0^1 ua$

$\mathcal{A} = \left[\frac{1}{2} - \ln(1 + e^{-1})\right] ua$

ua = 4cm^2

$\mathcal{A}$ =$[2 - 4\ln(1 + e^{-1})]$cm^2.

3 .Pour tout $k \in$IN, on a : $V_k = \int_k^{k+1} f(x)\, dx$

a) ***Calcul de V_0, V_1 et V_2***

$V_0 = \int_0^1 f(x)\, dx$ =$[\ln(x + e^{-x})]_0^1$;

$V_0 = \ln(1 + e^{-1})$

$V_1 = \int_1^2 f(x)\, dx$ =$[\ln(x + e^{-x})]_1^2$;

$V_1 = \ln(\frac{2e^2+1}{e^2+e})$

$V_2 = \int_2^3 f(x)\, dx$ =$[\ln(x + e^{-x})]_2^3$;

$V_2 = \ln(\frac{3e^3+1}{2e^3+e})$.

b) ***Encadrement de V_k***

Pour $k \geq 2$, f est décroissante sur $[\alpha; +\infty[$ avec $\alpha < k$ donc f est décroissante sur $[k; k+1]$

on a : $\forall\, x \in [k; k+1]$, f(k+1) $\leq f(x) \leq f(k)$ et par passage à l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\, dx \leq \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leq \int_k^{k+1} f(k)\, dx$$

$$f(k+1) \int_k^{k+1} dx \leq \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leq f(k) \int_k^{k+1} dx$$

d'où f(k+1) $\leq V_k \leq f(k)$ pour $k \geq 2$.

c) ***Calcul de la limite de V_k***

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ =0 ; on en déduit : $\lim\limits_{k \to +\infty} f(k+1) = 0$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} f(k) = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} V_k = 0$.