ENSEIGNEMENT DES SCIENCES MATHÉMATIQUES EN RÉPUBLIQUE GABONAISE

Epreuve 2 de synthèse et de préparation au

....

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL SESSION 2025

ÉPREUVE DE :

MATHÉMATIQUES

SÉRIE C-SI

Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 5

Auteur : Gildas Mba Obiang

Le sujet comporte **TROIS EXERCICES** dont un **QCM** et un **Problème**
Le candidat doit traiter tout le sujet

Dès qu'il vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel electronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur, il (elle) le signal très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

Exercice 1. QCM ../ 5 points

*Cette partie est un questionnaire à choix multiples (**qcm**). Pour chaque question, quatre réponses sont-proposées dont une seule est exacte. Vous indiquerez sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Une bonne réponse est notée 0,5 point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse est notée 0 point. Aucune justification n'est demandée.*

1. a) Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la famille de courbes C_m d'équation : $2mx^2-8mx-(m-1)y^2+12m-2=0$. La courbe C_m est une hyperbole si le réel m est tel que :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$-1<m<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<m<1$	$0<m\leq 1$	$1<m$

   b) Pour $m=\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{8}$ alors C_m est

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
une droite	l'ensemble vide	une ellipse	un singleton

2. Soit O un point du plan aorienté. A chaque point M du plan on associe le point G défini de la manière suivante :
   - Si M est en O, G est en O,
   - Si M est distinct de O, on construit le triangle OMM' rectangle en M tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)=\frac{\pi}{4}$.

   Le point G est alors le centre de gravité du triangle OMM.
   a) Si M est distinct de O alors :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OG}}\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OG}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OG}}\right)=\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OG}}\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

   b) De plus on a :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{OG}{OM}=\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{OG}{OM}=\frac{5\sqrt{5}}{3}$	$\frac{OG}{OM}=\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{OG}{OM}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$

3. Le plan P est orienté à un repère orthonormé. On considère dans P trois points distincts A,B et C d'affixe respectif les nombres complexes a, b et c. Alors ABC forme un triangle rectangle si et seulement si :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{b-a}{c-a}\in\mathbb{R}$	$\frac{b-a}{c-a}-\frac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{c}-\bar{a}}=0$	$\frac{b-a}{c-a}+\frac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{c}-\bar{a}}=0$	$\frac{b-a}{c-a}\in]-\infty,0]$

4. a) Une variable aléatoire X prendre les valeurs 1, -2, 3 avec des probabilités respectives $\log(\alpha)$, $\log(\beta)$, $\log(\gamma)$ où α, β, γ sont dans cet ordre les termes consécutifs d'une suite géométrique. On suppose que si $E(X)$ désigne l'expérance mathématique de X on a $E(X)=1$.
   Alors le triplé (α,β,γ) :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$

   b) X admet pour écart type le réel :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\sqrt{\frac{9}{2}}$	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\sqrt{\frac{7}{2}}$	$7\sqrt{2}$

5. Dans une station métérologique, on observe l'évolution de la pluviosité. Les mesures fonction à apparaître que :

   - le probalité qu'il pleuve une journée donnée sachant qu'il ne pleuvait pas le jour précédent est 0,1.
   - la probabilité qu'il ne pleuve pas une journée donnée sachant qu'il pleuvait le jour précédent est de 0,2.

   On effectue une suite d'observation à partir d'un jour (pris comme le «jour 1») où il pleut. Pour tout entier naturel non nul n, on note A_n l'évènement : «il pleut le jour n» et p_n sa probabilité. On a $P(A_1)$=1.
   a) Pour tout entier naturel n>1 on a :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
p_n=0,1p_{n-1}+0,2	p_n=0,7p_{n-1}+0,1	p_n=0,1p_{n-1}+0,7	p_n=0,2p_{n-1}+0,1

   b) La suite $(p_n)_n$ converge vers :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{7}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{8}$

Exercice 2. Arithmétique / 4 points
Partie A : Restitution organiser des connaissances
Soit n un entier non nul.

1. Montrer que pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{Z}^3$, si $a\equiv b[n]$ alors $ac\equiv$bc$[n]$
2. Montrer que pour tout $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ et tout $k\in\mathbb{N}$, si $a\equiv b[n]$ alors $a^k\equiv b^k[n]$

Partie B : Equation dans $\mathbb{N}$

1. On se propose de résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{N}$:

$$(E) \quad : \quad n\times 7^n+4n+1\equiv 0[8]$$

   a) Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, n pair on a $7^n\equiv 1[8]$.
   b) L'équation (E) admet-elle des entiers naturels pairs pour solutions ?
   c) Déterminer les entiers naturels impairs solutions de l'équation (E).

Partie C : Equation dans $\mathbb{Z}^2$

1. Resoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : $11x+8y=79$ (on pourra utiliser **la partie A**)
2. **Application**.
   Le prix total de 41 pièces détachées reparties en trois lots est de 48000 fcfa.

   - le prix d'une pièce du premier lot est de 4800 fcfa.
   - le prix d'une pièce du deuxième lot est de 3600 fcfa.
   - le prix d'une pièce du troisième lot est de 400 fcfa.

   Déterminer le nombre de pièce de chaque lot.

Exercice 3. Un calcul d'aire.. / 3 points
Soit le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous :

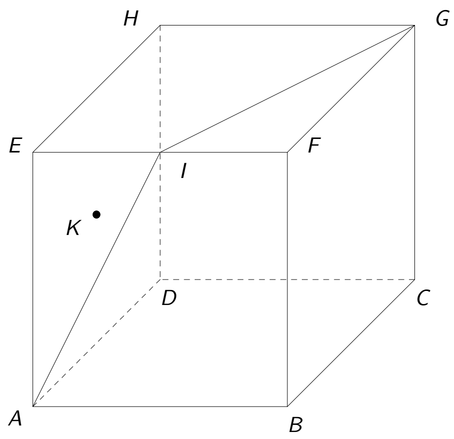

Figure.

L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. On désigne par I le milieu de [EF] et par K le centre du carré ADHE.

1. a) Vérifier que $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{IK}\wedge\overrightarrow{IA}$.
   b) En déduire l'aire du triangle IGA.
2. Calculons le volume du tétraèdre ABIG et en déduire la distance du point B au plan AIG.

Problème. Salade Russe../ 8 points
Partie I :
Le plan esr reporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Pour tout couple (a,b) de réels, on défini la transformation du plan, notée $T_{(a,b)}$, qui à tout point M de coordonnées (x,y), fait correspondre le point M' de coordonnées (x',y') satisfaisant le système :

$$\begin{cases} x'=x+a \\ y'=by \end{cases}$$

1. Etudier suivant les valeurs du couple (a,b) l'ensemble des points invariants par $T_{(a,b)}$.
2. Montrer que si b est différent de zéro, alors $T_{(a,b)}$ est la composée de deux translations t_1 et t_2 dont on précisera qui vérifient $t_1 \circ t_2 = t_2 \circ t_1$.
3. Soit D une droite du plan, d'équation cartésienne : $ux+vy+w=0$.
   a) Montrer que si b est différent de zéro, alors la droite D se transforme par $T_{(a,b)}$ en une droite D'.
   b) Dans quel cas D' est-elle parallèle à D ?
   c) Quel est l'ensemble D' transformé de la droite D lorsque $b=0$? Discuter.

Partie II :
On appelle $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y''-4y'+4y=0$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$.
2. A tout couple (α,β), de réels, on associe la fonction notée $f_{(\alpha,\beta)}$ définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par :

   $$f_{(\alpha,\beta)}(x)=(\alpha x+\beta)e^{2x}$$

   On appelle $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions ainsi obtenues. **Comparer** $\mathcal{S}$ et $\mathcal{F}$.
3. On note $f'_{(\alpha,\beta)}$ la dérivée de la fonction $f_{(\alpha,\beta)}$. **Prouver** que $f'_{(\alpha,\beta)}$ est un élément de $\mathcal{F}$ qui vérifie la relation : $f'_{(\alpha,\beta)}=f_{(2\alpha,\alpha+2\beta)}$.
   En déduire une primitive de la fonction $f_{(p,q)}$.

Partie III :

On note φ la fonction $f_{(2,-3)}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = (2x-3)e^{2x}$.

1. Etudier les variations de φ. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ dans le repère donné.
2. Quelle est l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point de $\mathcal{C}$ d'abscisse nulle ?
3. Montrer qu'il existe un réel x_0 et un seul tel que $\varphi''(x_0) = 0$. Déterminer la tangente à $\mathcal{C}$ au point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x_0.
4. Tracer le courbe $\mathcal{C}$ et les tangentes ci-dessus.
5. λ étant un paramètre réel, strictement négatif. Calculer, en fonction de λ, l'aire A_λ du domaine plan limité par la courbe $\mathcal{C}$ et les trois droites d'équations : $y=0$, $x=0$ et $x=\lambda$.

Partie IV :

On note T la transformation particulière $T_{(a,b)}$ correspondante à $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 2e^{-1}$.
Soit $C_{(\alpha,\beta)}$ la courbe représentative de la fonction $f_{(\alpha,\beta)}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f_{(\alpha,\beta)}(x) = (\alpha x + \beta)e^{2x}$$

1. Montrer que la transformée par T de la courbe $C_{(\alpha,\beta)}$ est la courbe représentative de la dérivée $f'_{(\alpha,\beta)}$.
2. On suppose $\alpha \neq 0$. Prouver que, pour toute fonction $f_{(\alpha,\beta)}$ la dérivée seconde $f''_{(\alpha,\beta)}$ s'annule une fois et une seule.
3. Quel est l'ensemble des points $I_{(\alpha,\beta)}$ tels que $\alpha + \beta = 1$?

FIN DE L'EPREUVE