

EXERCICE 1 (5 points)

Un paysan possède un champ où il plante des arbres fruitiers. Pour mieux les entretenir il décide de vendre chaque année les 5% des pieds existants et planter 3 000 nouveaux. Il démarre avec 50 000 pieds en 2015. On désigne par X_n le nombre de pieds d'arbres se trouvant dans le champ au cours de l'année $(2015 + n)$.

1. a) Déterminer le nombre d'arbres qu'il aura en 2016 et en 2017.
b) Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n .
2. On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = 60\,000 - X_n$.
a) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le 1^{er} terme.
b) Exprimer U_n en fonction de n . En déduire X_n en fonction de n .
c) Ce paysan aura combien d'arbres fruitiers dans 20 ans ?
d) Calculer la limite de la suite (X_n) . Conclure.

EXERCICE 2 (7 points)**Partie I**

Soit f une fonction numérique à variable réelle x satisfaisant aux conditions suivantes :

- f est définie et dérivable sur \mathbb{R} .
- $f(1) = f(3) = 0$; $f(2) = -1$; $f(0) = 1$; $f'(0) = f'(2) = 0$.
- $\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$; $\forall x \in]0 ; 2[$, $f'(x) < 0$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + 2] = 0^-$

1. Dresser le tableau de variation de f .
2. (\mathcal{C}_f) représentant les variations de f , préciser les équations des asymptotes à (\mathcal{C}_f) .
3. Préciser le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
4. Tracer dans le même repère (\mathcal{C}_f) et ses asymptotes.
5. Donner l'ensemble de définition des fonctions définies par : $\ln(f(x))$ et $\frac{1}{f(x)}$ où \ln désigne le logarithme népérien.

Partie II

Soient les nombres complexes $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\sqrt{3} + i$.

1. Écrire z_1 , z_2 et $\frac{z_2}{z_1}$ sous forme trigonométrique.
2. Montrer qu'il existe deux suites géométrique (U) et (V) telles que $U_2 = V_2 = z_1$ et $U_4 = V_4 = z_2$ dont on déterminera les premiers termes U_0 et V_0 et la raison de chacune d'elles.

PROBLÈME (8 points)

Soit la fonction numérique f à variable réelle x définie par : $f(x) = x + \frac{2(1+\ln x)}{x}$.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de f et les limites de f aux bornes de cet ensemble.
 - b) On considère la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = x^2 - 2\ln x$.
 - Étudier les variations de h sur $]0 ; +\infty[$.
 - En déduire le signe de $h(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.
 - c) Étudier les variations de f . Dresser son tableau de variation.
 - d) Prouver que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (\mathcal{C}_f) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
2. a) Tracer la courbe (\mathcal{C}_f) et ses asymptotes dans le plan muni du repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 - b) On désigne par $\mathcal{A}(k)$ l'aire exprimée en unité d'aire de la partie du plan limitée par (\mathcal{C}_f) , Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = k$. Calculer $\mathcal{A}(k)$.
 - c) Pour quelle valeur de k a-t-on $\mathcal{A}(k) = 8$?