Huitème édition des Olympiades Togolaises(OTM) et Concours Miss Mathématiques

Deuxème tour
Date: Samedi 19 Mai 2018
Niveau: Terminale D
Durée: 3 h 30

<u>NB</u>: Il est demandé aux candidats de laisser toute trace de recherches, justifier et détailler ses réponses et de laisser une ligne au moins entre deux questions. Les dernières feuilles sont les brouillons.

Exercice 1.

Soit $S_n = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{111\ldots1}$. Le dernier terme étant formé de n chiffres 1.

Démontrer que $S_n = \dfrac{10^{n+1} - 9(n+1) - 1}{81}$.

Indication: On pourra calculer $9S_n$.

Exercice 2.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O;$\vec{e_1}, \vec{e_2}$). on note A et B les points d'affixes respectives i et $-2i$.
Soit f l'application du plan privé de A dans lui-même qui à tout point M d'affixe z distincte de i associe le point M' d'affixe z' définie par: $z' = \dfrac{2z - i}{iz + 1}$.

1) Soit $z \neq i$.

   a) On pose $z - i = re^{i\theta}$. Interpréter géométriquement r et θ à laide des points A et M.

   b) Démontrer que $(z' + 2i)(z - i) = 1$.

   c) On pose $z' + 2i = r'e^{i\theta'}$.
   Exprimer r' et θ' en fonction de r et θ. Interpréter géométriquement r' et θ' à laide des points B et M'.

2) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1.

   a) Démontrer que si M appartient à $\mathscr{C}$, son image M' appartient à un cercle $\mathscr{C}'$ de centre B et dont on précisera le rayon.

   b) Le cercle $\mathscr{C}'$ est-il l'image par f du cercle $\mathscr{C}$?

3) Soit T le point d'affixe $\frac{\sqrt{2}}{2} + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})i$.

   a) Calculer l'affixe de $\overrightarrow{AT}$; en déduire que T appartient au cercle $\mathscr{C}$.

   b) Déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{AT}})$. Tracer $\mathscr{C}$ et placer T.

   c) En utilisant les questions précédentes, construire l'image T' de T par F.

Exercice 3.

On considère les fonctions dérivables suivantes :

- f définie de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2}dt$;
- F définie de $[0;\frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbb{R}$ par: $F(x) = f(\sin x)$.

Le but de cet exercise est de calculer l'intégrale: $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$.

1) Calculer $F'(x)$ pour tout x de $[0;\dfrac{\pi}{2}]$.
2) Démontrer que, pour tout nombre réel x de $[0;\dfrac{\pi}{2}]$, $F(x) = \int_0^x \cos^2 t dt$.
3) Sans calculer les intégrales, démontrer l'égalité: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$
   En déduire la valeur commune des deux intégrales.
4) Déduire des questions précédentes que: $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 4.

f est la fonction de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$ et h est la fonction définie sur le même intervalle par $h(x) = \ln(\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}})$.

1. Démontrer que f est une bijection de $[0;+\infty[$ vers $]0;\frac{1}{2}]$.
2. Le plan esr rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, l'unité graphique étant égale à 2 cm.
   Tracer dans ce repère les courbes représentatives de f et de f^{-1}.

3.a) Calculer la dérivée de h.

b) En déduire l'aire de la partie du plan limité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 1$ et la courbe représentative de f.