Kenya – PAMO 2018

$26^{ièmes}$ **OLYMPIADES PAN AFRICAINES DE MATHÉMATIQUES**

Nairobi du 23 au 30 Juin 2018

Jour 1 : Mercredi 27 Juin 2018 **Durée : 4 h 30 min**

PROBLÈME 1

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ telles que $(f(x+y))^2 = f(x^2) + f(y^2)$ pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$.

PROBLÈME 2

Un tournoi d'échecs est organisé avec la participation de garçons et de filles. Le nombre de filles est le double de celui des garçons. Deux joueurs se rencontrent exactement une fois. A la fin du tournoi, il n'y a eu aucun nul et le rapport des victoires des filles par les victoires des garçons a été $\frac{7}{9}$.
Combien de joueurs ont participé au tournoi ?

PROBLÈME 3

Pour tout entier naturel non nul x, on pose

$$g(x) = \text{le plus grand diviseur impair de } x,$$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x}{g(x)}, & \text{si } x \text{ est pair;} \\ 2^{\frac{x+1}{2}}, & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases}$$

On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $x_1 = 1,\ x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que l'entier 2018 apparaît dans cette suite, déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que $x_n = 2018$, et déterminer si n est unique ou non.

AMU

Kenya – PAMO 2018

$26^{ièmes}$ OLYMPIADES PAN AFRICAINES DE MATHÉMATIQUES

Nairobi du 23 au 30 Juin 2018

Jour 2 : Jeudi 28 Juin 2018 **Durée : 4 h 30 min**

Problème 4

Etant donné un triangle ABC, soit D le point d'intersection de la droite passant par A perpendiculaire à (AB), et de la droite passant par B perpendiculaire à (BC). Soit P un point à l'intérieur du triangle. Montrer que les points D, A, P et B sont cocycliques si et seulement si $\widehat{BAP} = \widehat{CBP}$.

Problème 5

Soient a, b, c et d des réels non nuls, deux à deux distincts tels que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4 \text{ et } ac = bd.$$

Montrer que

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} \leqslant -12$$

et que -12 est le maximum.

Problème 6

Un cercle est divisé en n secteurs $(n \geqslant 3)$. Chaque secteur peut être rempli soit par 1 ou 0. On choisit n'importe quel secteur $\mathcal{C}$ contenant 0, on le change en 1 et on change simultanément les symboles x, y dans les deux secteurs adjacents à $\mathcal{C}$ en leurs complémentaires $1-x$, $1-y$. On répète ce procédé tant qu'il existe un zéro dans un certain secteur. Dans la configuration initiale il existe un 0 dans un seul secteur et des 1 dans les autres secteurs. Pour quelles valeurs de n peut-on finir ce procédé ?