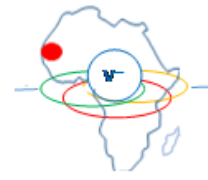




U.M.A

Commission OPAM



OPAM 2016
Dakar Sénégal

24^{ièmes} OLYMPIADES PAN AFRICAINES DE MATHÉMATIQUES

Jour 1 : Mercredi 27 avril 2016

Durée : 4 h 30 min

PROBLÈME 1

Deux cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 se coupent en deux points distincts M et N . Les cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ont une tangente commune respectivement en P et en Q , la tangente étant plus proche de N que de M . La droite (PN) recoupe le cercle \mathcal{C}_2 en un point R .

Montrer que la droite (MQ) est la bissectrice de l'angle \widehat{PMR} .

PROBLÈME 2

On dispose d'une pile de 2016 cartes et d'un chapeau. On tire une carte, on la met dans le chapeau et on partage arbitrairement les cartes restantes en deux piles. A l'étape suivante, on choisit l'une des deux piles, on tire une carte de cette pile que l'on met dans le chapeau puis on partage à nouveau arbitrairement le restant en deux nouvelles piles.

On répète ce procédé plusieurs fois : à la k -ième étape on tire une carte à partir de l'une des piles constituées à l'étape $(k - 1)$ et on la met dans le chapeau puis on partage à nouveau cette pile en deux.

Est-il possible, après un certain nombre de répétitions de ce procédé, d'obtenir un nombre de piles de sorte que chacune d'elles contienne trois cartes ?

PROBLÈME 3

Pour tout entier strictement positif n , on définit l'entier $P(n)$ par :

$$P(n) = n(n + 1)(2n + 1)(3n + 1) \dots (16n + 1).$$

Trouver le plus grand commun diviseur des entiers $P(1), P(2), P(3), \dots, P(2016)$.



U.M.A

Commission OPAM



OPAM 2016
Dakar Sénégal

24^{ième} OLYMPIADES PAN AFRICAINES DE MATHÉMATIQUES

Jour 2 : Jeudi 28 avril 2016

Durée : 4 h 30 min

PROBLÈME 1

Soient x, y, z des réels strictement positifs tels que $xyz = 1$.

Montrer que

$$\frac{1}{(x+1)^2 + y^2 + 1} + \frac{1}{(y+1)^2 + z^2 + 1} + \frac{1}{(z+1)^2 + x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}.$$

PROBLÈME 2

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$, tel que $AB > CD$. Les points M et N sont situés respectivement sur $[AB]$ et $[BC]$ de sorte que chacun des segments $[CM]$ et $[AN]$ divise le trapèze en deux parties d'aires égales.

Montrer que le segment $[MN]$ coupe le segment $[BD]$ en son milieu.

PROBLÈME 3

On considère un quadrillage de taille $n \times n$ formé par n^2 carrés de côté 1. On définit le centre d'un carré comme étant le point d'intersection de ses diagonales.

Déterminer le plus petit entier m tel que, parmi n'importe quel nombre m de carrés dans le quadrillage, on en a toujours quatre dont les centres sont les sommets d'un parallélogramme.