Union Mathématique Africaine
Commission des Olympiades
Pan Africaines de Mathématiques

Ministère de l'Enseignement Secondaire
De la Formation Technique
et Professionnelle

18ème Olympiade Pan Africaine de Mathématiques
OPAM 2008
Porto Novo, 28 Juillet – 2 Août 2008
Premier Jour
Durée : 4h30

Instructions

1. Les instruments de calcul et autres documents tels que notes manuscrites ou extraits de livres ne sont pas autorisés en salle d'examen.
2. Seuls les stylos, crayons, règles et compas peuvent être utilisés.

EXERCICE 1

Soit **R** l'ensemble des nombres réels. Déterminer toutes les fonctions f : **R** → **R** vérifiant : $f(x+y) \leq f(x) + f(y) \leq x+y$ pour tous x et y réels.

EXERCICE 2

Soit C_1 un cercle de centre O et [AB] une corde ne contenant pas O. Soit M le milieu de [AB]. On considère sur le cercle C_2 de diamètre [OM] un point T. La tangente en T à C_2 coupe C_1 en deux points. Soit P un de ces points. Montrer que $PA^2 + PB^2 = 4\,PT^2$.

EXERCICE 3

Soient trois entiers positifs non nuls a, b et c tels que $a < b < c$. On considère les ensembles A, B, C et X définis de la façon suivante :
$A = \{1, 2, \ldots, a\}$, $B = \{a+1, a+2, \ldots, b\}$, $C = \{b+1, b+2, \ldots, c\}$ et $X = A \cup B \cup C = \{1, 2, \ldots c\}$.
Déterminer en fonction de a, b et c le nombre de façons de placer les éléments de X dans trois boîtes de la manière suivante :

Boîte 1	Boîte 2	Boîte 3
x	y	z

Sachant que :

a) $x \leq y \leq z$;
b) les éléments de B ne doivent pas être mis dans la boîte 1
c) les éléments de C ne peuvent être mis que dans la boîte 3

Union Mathématique Africaine
Commission des Olympiades
Pan Africaines de Mathématiques

Ministère de l'Enseignement Secondaire
De la Formation Technique
et Professionnelle

18ème Olympiade Pan Africaine de Mathématiques
OPAM 2008
Porto Novo, 28 Juillet – 2 Août 2008
Deuxième Jour
Durée : 4h30

Instructions

3. Les instruments de calcul et autres documents tels que notes manuscrites ou extraits de livres ne sont pas autorisés en salle d'examen.
4. Seuls les stylos, crayons, règles et compas peuvent être utilisés.

EXERCICE-4.

Soient x et y deux réels strictement positifs quelconques. Démontrer que

$$xy \leq \frac{x^{n+2} + y^{n+2}}{x^n + y^n}$$ pour tout entier naturel.

EXERCICE-5.

Un ensemble d'entiers naturels X est dit *lié* si card(X) ≥ 2 et si on peut trouver deux éléments distincts m et n de X tels que m est un diviseur de n.
Déterminer le nombre de sous ensembles *liés* de {1, 2, 3, ….., 10}.

EXERCICE 6.

Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, il existe un entier naturel m non nul multiple de n et dont la somme des chiffres dans le système décimal est égal à n.