République de Côte d'Ivoire - Ministère de l'Education Nationale, de l'Enseignement Technique et de la Formation Professionnelle

BAC BLANC UEMOA **Durée : 4 heures**
SESSION 2019 **Coefficient : 5**

MATHEMATIQUES - SERIE : C

*Cette épreuve comporte trois pages numérotées*1 sur 3*, 2 sur 3 et 3 sur3*
Chaque candidat recevra une (1) feuille de papier millimétré.
Tout modèle de calculatrice scientifique non graphique est autorisé.

Exercice 1 (2 points)
Ecris sur ta copie le numéro de l'affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie et de FAUX si l'affirmation est fausse.
1. On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos x \leq 1$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \cos x) = 1$.
2. Soit *f* une fonction continue sur un intervalle I.
S'il existe deux éléments a et b ($a < b$) de I tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.
3. L'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ est une ellipse.
4. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur f(I).
Une primitive de $u' \times (v' \circ u)$ sur I est $v \circ u$.

Exercice 2 (2 points)
Pour chacun des énoncés, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Ecris sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la bonne réponse**.**

Enoncés		Réponses proposées	
1.	Soit (E) l'équation : $(x; y) \in \mathbb{Z}^2, 24x + 34y = 2$	A	Les solutions de (E) sont de la forme $(34k - 5\,;\, 7 - 24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.
		B	L'équation (E) n'admet aucune solution
		C	Les solutions de (E) sont de la forme : $(17k - 7\,;\, 5 - 12k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.
2.	$a = 10\,999\,781$. Le reste de la division euclidienne de a^3par 7 est :	A	1
		B	6
		C	5
3.	a et b sont deux nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. PPCM (a ; b) = ab si et seulement si	A	a divise b.
		B	a et b soient premiers entre eux.
		C	a soit un multiple de b.

Exercice 3 (3 points)

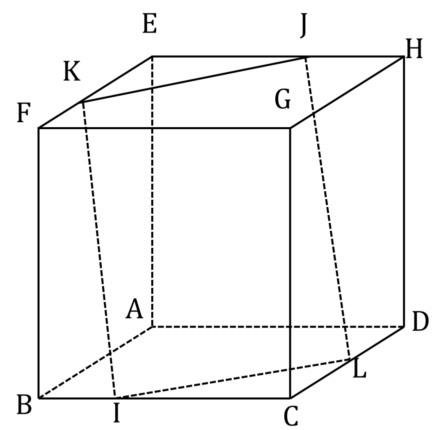
Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, ABCDEFGH est un cube.

On munit l'espace $(\mathcal{E})$ d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{A}; \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

* I est un point du segment [BC] tel que I $\left(1; \frac{1}{3}; 0\right)$.

* Soit $(\mathcal{P})$ le plan passant par I et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}8\\9\\5\end{pmatrix}$.

* Les points J, K et L sont les points d'intersection respectifs du plan $(\mathcal{P})$ et des droites (EH), (FE) et (CD).



1. a) Justifie que le plan (P) a pour équation cartésienne : $8x + 9y + 5z - 11 = 0$.

b) Justifie que les coordonnées des points J, K et L sont respectivement : $\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$, $\left(\frac{3}{4}; 0; 1\right)$ et $\left(\frac{1}{4}; 1; 0\right)$.

2. a) Démontre que les droites (IJ) et (KL) ont pour représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

b) Démontre que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes en un point O dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 4 (4 points)

Soit u un nombre complexe.

On considère l'équation (E_u) : $z \in \mathbb{C}$, $z^2 - (2u - i\bar{u})z - 2iu\bar{u} = 0$ où $\bar{u}$ désigne le nombre complexe conjugué de u

1. a) Justifie que le discriminant Δ de (E_u) est égal à $(2u + i\bar{u})^2$

b) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_u). On désignera par z' et z'' les solutions de (E_u).

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ tel que : $\|\overrightarrow{e_1}\| = \|\overrightarrow{e_2}\| = 2\text{cm}$.

A, M′ et M″ sont les points d'affixes respectives $2i$, z' et z''.

Soit (H) l'ensemble des points M d'affixe u tels que les points A, M′ et M″ sont alignés.

a) Démontre qu'une équation cartésienne de (H) est : $x^2 + 2x - y^2 + y = 0$.

b) Donne la nature et les éléments caractéristiques de (H).

3. a) Vérifie que O appartient à (H).

b) Construis (H) dans le repère orthonormé $(\mathrm{O}; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Exercice 5 (5 points)

1.a) Démontre que l'équation (E) : $x \in]0;+\infty[,\ x + \ln x = 0$ admet une unique solution α.

b) Justifie que : $\alpha \in \left]\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right[$.

2. On considère la fonction φ définie sur $]0;+\infty[$ par : $\varphi(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

a. Vérifie que : $x \in]0;+\infty[, \varphi(x) = x$ si et seulement si, $\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

b. Déduis-en que $\frac{1}{\alpha}$ est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$ dans $]0;+\infty[$.

c. Démontre que : $\forall\, x \in \left[\frac{3}{2};3\right],\ |\varphi'(x)| \leq \frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}}$.

3. On considère la suite numérique (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \varphi(v_n), \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$

a. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $\frac{3}{2} \leq v_n \leq 2$.

b. Démontre que pour tout entier naturel n, $\left|v_{n+1} - \frac{1}{\alpha}\right| \leq \frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}}\left|v_n - \frac{1}{\alpha}\right|$.

c. Déduis-en que (v_n) est convergente puis détermine sa limite.

Exercice 6 (4 points)

Pour aider son père à protéger ses fichiers confidentiels de travail, un élève de terminale C utilise le procédé suivant :

● À chacune des 26 lettres de l'alphabet, il associe un entier naturel n selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

● Il associe à l'entier n, le reste de la division euclidienne de $5n + 2$ par 26;

● Ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

Exemple : pour coder la lettre P, il procède de la manière suivante :

Étape 1 : la lettre P est associée à 15 ;

Étape 2 : le reste de la division euclidienne de $5 \times 15 + 2$ par 26 est 25 ;

Étape 3 : 25 est associé à la lettre Z. Donc P est codé par la lettre Z.

Le père s'interroge si ce procédé ne conduit pas au codage de deux lettres distinctes par une même lettre et s'il est possible de décoder une fois le codage effectué. Pour le rassurer, son fils effectue des calculs.

On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers naturels n et p.

1.a). Démontre que $5n + 2$ et $5p + 2$ ont le même reste dans la division par 26 si et seulement si $n = p$.

b). Code le mot UEMOA.

2. On se propose de décoder la lettre E.

a. Démontre que décoder la lettre E revient à déterminer l'entier naturel n tel que :
$0 \leq n \leq 25$ et $5n - 26y = 2$, où y est un entier naturel.

b. Décode alors la lettre E.