

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (2) pages
(Les calculatrices ne sont pas autorisées)

Exercice 1 (5 points)

Soit le polynôme $P(x) = (5x - 2)(2x - 1)(x + 1)$

- 1) Développer, réduire et ordonner $P(x)$. (1 point)
- 2) Résoudre dans \mathbb{R} :
 - a) l'équation $P(x) = 0$. (1 point)
 - b) l'inéquation $P(x) \geq 0$. (1 point)
 - c) En utilisant les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $P(x) = 0$, résoudre dans \mathbb{R} , l'équation: $10(\ln x)^3 + (\ln x)^2 - 7 \ln x + 2 = 0$. (1 point)
- 3) Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le système suivant : $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2e^{2x} - 15e^{1-y} = 8 \end{cases}$ (1 point)

Exercice 2 (5 points)

Le 1er janvier 2020, une association caritative compte 1500 donateurs. Une étude a montré que chaque année, 30% des donateurs de l'année précédente ne renouvelaient pas leur don mais que chaque année, il y avait 300 nouveaux donateurs.

Pour tout entier naturel n , on appelle U_n , le nombre de donateurs de l'association le 1er janvier de l'année $(2020 + n)$; on a donc $U_0 = 1500$.

- 1) a) Calculer U_1 et U_2 . (0,5 point + 0,5 point)
b) Vérifier que pour tout entier naturel n , on a : $U_{n+1} = 0,7U_n + 300$. (0,5 point)
- 2) Soit la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 1000$.
 - a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique et préciser sa raison et son premier terme. (0,5 point + 0,5 point + 0,5 point)
 - b) Exprimer V_n en fonction de n puis U_n en fonction de n . (0,5 point + 0,5 point)
- 3) Calculer la limite de U_n en $+\infty$. (1 point)

Problème (10 points)

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = -x + 3 + e^{x-2}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 1 cm.

- 1) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. (0,5 point + 0,5 point)
- 2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x , f' étant la fonction dérivée de f . (1 point)
b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation. (3 points)

- 3) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 3 - x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) en $-\infty$. (1 point)
b) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D) . (1 point)
- 4) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $x_0 = 2$. (1 point)
- 5) Construire la tangente (T) , l'asymptote (D) et la courbe (C) sur $]-\infty, 4]$. (0,5 point + 0,5 point + 1 point)

Données : $e^2 \simeq 7,4$; $e \simeq 2,7$.

Fin