SOCIETE MATHEMATIQUE
DE COTE D'IVOIRE (SMCI)

SOCIETE MATHEMATIQUE
DE COTE D'IVOIRE - SMCI

Concours Miss Mathématique 2014

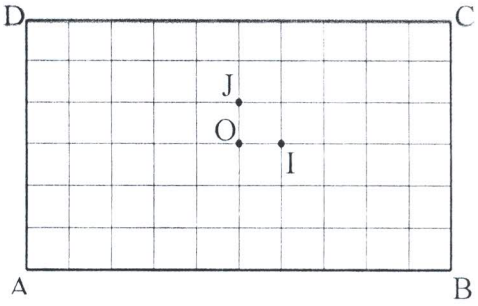
NIVEAU : Terminale C

Durée : 4 heures

Cette épreuve comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2. Les cinq exercices sont indépendants.

1 RECONCILIATION

Dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) (unité : 1 cm), on considère le rectangle ABCD de longueur AB = 10 et de largeur BC = 6.
O est le centre du rectangle ABCD.
On choisit au hasard un point quelconque M de coordonnées entières de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.



1. Justifier que la probabilité pour que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] est égale à $\frac{5}{11}$.
2. Quelle est la probabilité pour que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?
3. Calculer la probabilité pour que M soit plus proche de [AB] que de [BC] et plus proche de [AB] que de [CD] et plus proche de [AB] que de [DA] ?

2 PAIX

Soit f la fonction définie pour $x > \frac{1}{2}$ par : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall\, x > 1,\ f(x) > 1$.

2. On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.
   On se propose, dans la suite de l'exercice, d'exprimer u_n en fonction de n.
   On considère les suites (v_n) et (w_n) telles que, pour tout entier naturel n :
   $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ et $w_n = \ln(v_n)$.
   a) Vérifier que v_n et w_n sont définies pour tout entier naturel n.
   b) Démontrer que la suite (w_n) est une suite géométrique.
   c) Exprimer pour tout entier naturel n, w_n puis v_n en fonction de n.
   d) En déduire que $u_n = \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^{2^n}}$ pour tout entier naturel n.
   e) Déterminer la limite de la suite (u_n).

3 FRATERNITE

Dans le plan orienté, on considère un triangle OAB direct, rectangle et isocèle en O.
On désigne par J le milieu de [AB].
La droite (Δ) est perpendiculaire à (AB) en A.
M est un point variable de la droite (Δ).
La perpendiculaire à (OM) en O coupe (AB) en M'.

1. Soit r la rotation de centre O telle que r(A) = B.
   a) Démontrer que, pour tout point M de (Δ), r(M)=M'.
   b) En déduire que le triangle OMM' est rectangle et isocèle en O.
2. *a)* Pour tout point M de (Δ), on note I le milieu de [MM']. S est la similitude directe de centre O telle que S(M) = I. Préciser le rapport et l'angle de S.
   b) Soit H le projeté orthogonal de O sur (Δ). Déterminer S(H).
   c) Déterminer le lieu géométrique du point I lorsque M décrit (Δ).
3. Pour tout point M de (Δ) distinct de A, on désigne par P le point tel que MAM'P est un rectangle.
Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2.
   a) Déterminer hoS(M).
   b) Déterminer le lieu géométrique du point P lorsque M décrit (Δ) - {A}.

4 SOLIDARITE

ℕ étant l'ensemble des entiers naturels, le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une bijection entre ℕ² et ℕ.

Soit φ l'application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ définie par :

$$\forall (x\,;y) \in \mathbb{N}^2,\ \varphi(x\,;y) = x + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}.$$

1. Justifier que $\forall (x\,;y) \in \mathbb{N}^2,\ \varphi(x\,;y) \in \mathbb{N}$.
2. Justifier les propriétés ci-dessous :
   a) $\forall y \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{N},\ \varphi(x+1\,;y-1) = \varphi(x\,;y) + 1$.
   b) $\forall x \in \mathbb{N},\ 1 + \varphi(x\,;0) = \varphi(0\,;x+1)$.
3. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que tout entier naturel n a au moins un antécédent par φ.
4. Etant donnés x et y éléments de $\mathbb{N}$, on pose $k = x + y$.
Démontrer que : $\dfrac{k(k+1)}{2} \leq \varphi(x\,;y) \leq \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.
5. *a)* En admettant que l'application φ est injective, justifier qu'elle est bijective.
   b) Déterminer l'antécédent de 1000 par φ.
   (*On pourra utiliser la double inégalité de la question 4*).

5 DEVELOPPEMENT

Dans un livre, la page numérotée 1 est à droite. Les pages paires sont à gauche et les pages impaires à droite.
On additionne les numéros de toutes les pages de ce livre et on trouve un total de 2015. Mais deux pages numérotées sont restées collées et leurs numéros n'ont pas été comptés.
Quels sont le nombre de pages du livre et les numéros des pages collées ?